

CAPÍTULO I

ESTRUCTURAS PLANAS

Los elementos estructurales utilizados en la técnica constructiva pueden agruparse en dos formas tipo:

1) *formas lineales o piezas prismáticas* o brevemente *barras* (viga, columna), constituidas por sólidos de forma cilíndrica o prismática cuyas dimensiones transversales son pequeñas en comparación con su longitud.

2) *formas superficiales* (placas, bóvedas), pertenecen a éstas, los sólidos cuyo espesor es despreciable con relación a sus restantes dimensiones.

Sólo nos ocuparemos de piezas prismáticas.

Geométricamente una barra puede considerarse definida por una figura plana S (fig. 1) con *eje de simetría* yy , la cual se traslada a lo largo de una línea plana AB , en posición siempre perpendicular a ésta y con su centro de gravedad G sobre AB .

La figura plana se denomina *sección transversal* o *perfil* de la barra; la línea AB (recta o curva) lugar de los centros de gravedad del perfil, *eje de la barra* o *eje longitudinal*. El plano determinado por y , con AB , es el *plano de simetría* de la pieza y en él se encuentran todas las fuerzas que gravitan sobre la pieza. Estas fuerzas se llaman *cargas*.

Por consiguiente nada impide asimilar toda barra a una *chapa* plana infinitamente delgada, materialización del plano de simetría de la barra.

El perfil de la barra puede cambiar de forma o de tamaño de modo continuo y ser lleno o con huecos interiores. El radio de curvatura del eje AB debe ser varias veces mayor que la dimensión transversal de la barra medida en la dirección del eje de simetría y .

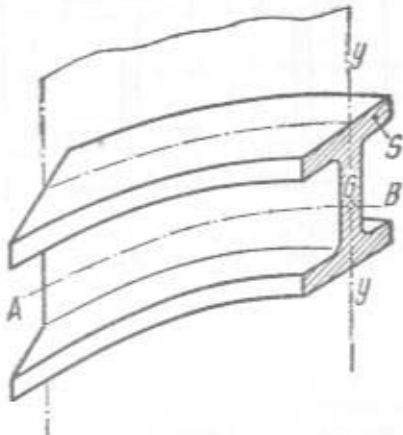


Fig. 1

nea paralela al eje longitudinal AB se llama *fibra*, siendo *fibra media*. La representación gráfica de una barra se hará eje.

La definición de barra, debe corresponder, en Resistencia de Materiales, a la textura material de la pieza. Si se trata de laminados, la fibra media debe ser paralela al sentido del laminado. En la madera, es necesario que las fibras sean perpendiculares al perfil S .

Debido a las formas asignadas a los perfiles, la práctica limita a un número reducido de figuras planas que dependen de la naturaleza del material utilizado: acero laminado, fundición, hierro y aleaciones de aluminio.

Entre los aceros laminados, razones estáticas y técnicas han determinado perfiles fundamentales, que se conocen con la denominación de *perfiles normales* (fig. 2).

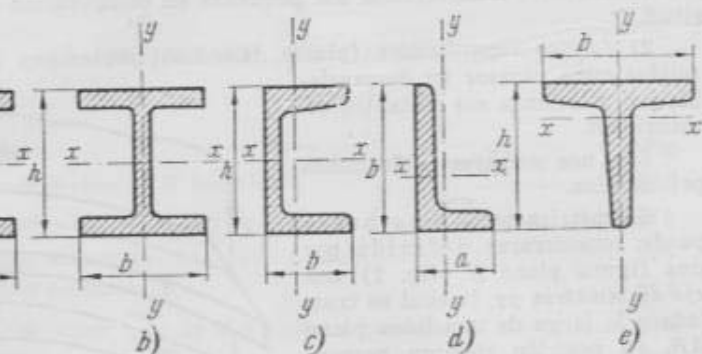


Fig. 2

Perfil doble T. — Consta de alma y dos alas. Presenta dos ejes de simetría $x-x$ y $y-y$. Queda identificado por su altura h (medida en centímetros) y el número del perfil. La longitud del ala, espesor de éstas, así como las diversas constantes mecánicas que lo definen, están en las tablas especiales. Para indicar un perfil normal doble T de altura h se escribe PNT 20.

Perfil doble T de alas anchas. — Differding, Grey, Peine. También se identifican por su altura.

Perfil U. — Tiene un solo eje xx de simetría. También en este caso el número corresponde a su altura h (en centímetros).

Perfil ángulo o hierro ángulo. — Formado por dos alas en ángulo, cuyas longitudes a y b pueden ser iguales o distintas. Si son iguales, sus longitudes se presentan en la relación $1:1\frac{1}{2}$ y $1:2$. La forma usada para identificarlos consiste en escribir las dimensiones de ambas alas separadas por un punto y debajo de ellas.

separada por una raya horizontal se escribe el espesor común de las alas. Así: $\frac{100 \cdot 150}{12}$.

e) *Perfil de simple T*. — En el comercio se encuentran dos formas: *T* de ala ancha en la relación $h/b = 1/2$ y *T* de ala corta según la razón $h/b = 1/1$ (perfiles normales). Se identifican por sus respectivas medidas h y b , expresadas en milímetros, con la escritura $h \cdot b$.

En hormigón armado los perfiles más frecuentes son los indicados en la fig. 3.

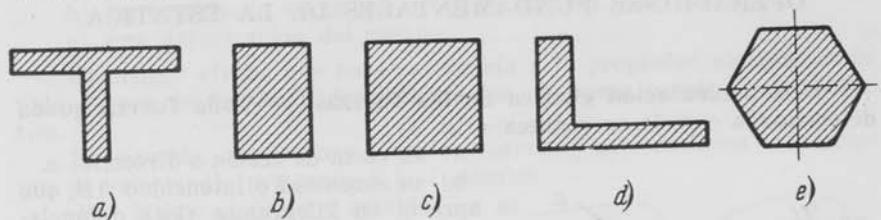


Fig. 3

Para piezas de madera los perfiles son el rectangular y el cuadrado.

Un conjunto resistente de barras enlazadas se denomina *estructura lineal*. Si todas las piezas que la forman tienen un plano de simetría común y en él se encuentran las fuerzas incidentes en la estructura, ésta se denomina *estructura lineal plana*.

Un conjunto de piezas no lineales origina *estructuras superficiales*.

En lo que sigue sólo se estudiarán estructuras planas. La Estática de este tipo de estructuras se llama *Estática de los sistemas planos*, que iniciamos en el capítulo siguiente.



CAPÍTULO II

OPERACIONES FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA

1. Representación gráfica de las fuerzas. — Toda fuerza queda determinada cuando se conozca (fig. 4):

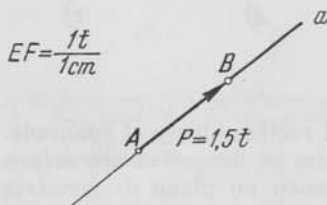


Fig. 4

- a) su *recta de acción* o directriz: *a*.
- b) su *magnitud* o intensidad *AB*, que se aprecia en kilogramos (kg) o toneladas (t).
- c) su *sentido*, puesto en evidencia por una flecha.
- d) su *punto de aplicación*: *A*.

Para representar gráficamente una fuerza es necesario utilizar una *escala de fuerzas*, abreviadamente expresada con la escritura: *EF*. Se entiende por escala de fuerzas una relación entre la intensidad *P* de la fuerza (kg ó t) y una longitud (cm) que sirve para representarla en el papel. Así:

$$EF = \frac{500 \text{ kg}}{1 \text{ cm}}$$

significa que cada centímetro del dibujo representa 500 kg. Conviene, para facilitar los cálculos, poner en el denominador la unidad.

Supongamos que en la escala de fuerzas indicada, se quiera representar una fuerza de $P = 1300 \text{ kg}$. Tendrá que ser:

$$\frac{500 \text{ kg}}{1 \text{ cm}} = \frac{1300 \text{ kg}}{x \text{ cm}}$$

de donde

$$x \text{ cm} = \frac{1300 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cm}}{500 \text{ kg}} = 2,6 \text{ cm}$$

que es el segmento representativo de la fuerza dada.

Inversamente y con la misma escala, para determinar la intensidad *P* de fuerza correspondiente a un segmento del dibujo igual a 2,5 cm, escribiremos:

$$\frac{500 \text{ kg}}{1 \text{ cm}} = \frac{P \text{ kg}}{2,5 \text{ cm}}$$

de donde:

$$P \text{ kg} = \frac{500 \text{ kg} \cdot 2,5 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 1250 \text{ kg}.$$

2. Elementos fundamentales de la estática. — Si una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido M , puede manifestar su acción mediante tres efectos:

- a) un *desplazamiento* del cuerpo, siempre que éste se encuentre en reposo y no trabado en su movimiento.
- b) un *cambio de velocidad*, si M ya está en movimiento.
- c) una *deformación* del cuerpo.

El primer efecto, que hace referencia a la propiedad cinemática de toda fuerza de producir desplazamientos, es tema propio de la Estática.

El segundo, que implica vincular fuerzas y aceleraciones (variaciones de velocidad), pertenece a la Dinámica.

Por último el c), que establece relaciones entre fuerzas y deformaciones, es estudiado por la Resistencia de materiales.

Sea una chapa plana C infinitamente delgada materializando así cualquier superficie plana (fig. 5a). Supongamos que está sometida a la acción de una fuerza P de su plano, aplicada en A . Si la chapa no se encuentra impedida en su movimiento, la fuerza P origina una traslación de la chapa en el sentido y dirección de la fuerza actuante.

Por tanto *el efecto cinemático de una fuerza es producir una traslación*.

En cambio si la chapa está empernada en O (fig. 5b) y sometida a la acción conjunta de dos fuerzas de igual intensidad P , opuestas y actuando en dos rectas de acción paralelas, b , c , la chapa C gira en torno de su único punto fijo O , en el sentido de la flecha curvilínea.

El conjunto de dos fuerzas como las indicadas, se denomina *cupla* o *par de fuerzas*. Por tanto *el efecto cinemático de una cupla es producir una rotación*.

La rotación se mide por el *momento del par* que es el producto de la intensidad común P , por la distancia a entre las líneas de acción b , c ; distancia denominada *brazo de palanca* de la cupla. Este producto está afectado del signo más o del menos, según que la rotación se realice en el sentido del movimiento de las agujas del reloj o en sentido contrario.

Su unidad de medida en las aplicaciones técnicas es el kilográmetro (kgm) o tonelámetro (tm).

La Estática se propone contrarrestar los efectos cinemáticos: traslación y rotación, que las fuerzas y cuplas originan con el propósito de alcanzar un *estado de reposo* o sea de equilibrio estático.

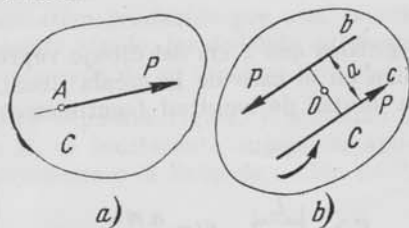


Fig. 5

Como todos los desplazamientos planos siempre se reducen a traslaciones o rotaciones, la Estática se construye partiendo de *fuerzas* y de *cuplas*. Éstos son los únicos *elementos* que necesita, como conceptos de base; son, además, *irreductibles* en el sentido que no pueden llevarse a otros más simples.

3. Sistemas de fuerzas. — Aparte la escala de fuerzas, en la Estática se necesita una escala de dibujo o *escala lineal*, para representar el esquema acotado de la estructura, que fija las posiciones relativas de las fuerzas actuantes, entre sí y con aquélla. Lo denominaremos *esquema posicional* o plano de posición.

Una escala lineal, abreviadamente *EL*, expresa la relación entre las magnitudes lineales reales de una estructura (generalmente medidas en metros) y la longitud que la representa en el dibujo (cm). Así:

$$EL = \frac{2 \text{ m}}{1 \text{ cm}}$$

significa que 1 cm del dibujo representa 2 m de la magnitud real. También en el caso de la escala lineal, conviene colocar en el denominador la unidad de longitud (centímetro).

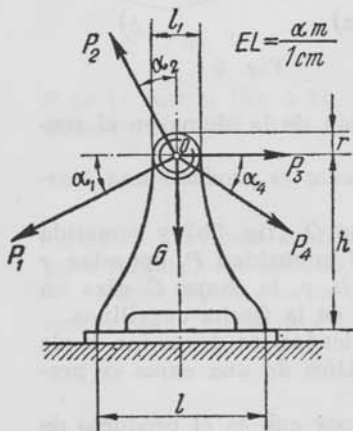


Fig. 6

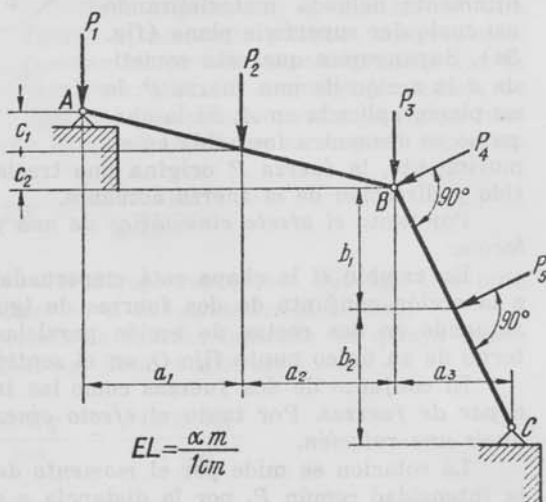


Fig. 7

La fig. 6 es el esquema posicional según escala, correspondiente a un soporte sometido a un *sistema de fuerzas concurrentes*, en O, y coplanares.

Análogamente, el esquema posicional de la fig. 7, representa una *armadura mansarda ABC*, sobre la cual inciden las fuerzas P_1, \dots, P_5 , que forman un *sistema de fuerzas no concurrentes*, coplanares.

Por último en la fig. 8 se tiene el esquema posicional de una viga solicitada por fuerzas verticales P_1 , P_2 , P_3 que forman un sistema de fuerzas paralelas.

4. **Transformación de sistemas de fuerzas.** — Transformar un sistema de fuerzas quiere decir sustituirlo por otro sistema que produzca el mismo efecto cinemático que el primero. Se dice entonces que los dos sistemas son *estáticamente equivalentes*.

Generalmente la transformación de un sistema de fuerzas se propone encontrar un sistema más sencillo que el primitivo; en otros casos se trata de obtener sistemas equivalentes que cumplan condiciones particulares prefijadas.

5. **Las cuatro operaciones fundamentales de la Estática.** — La experiencia asegura que las cuatro operaciones siguientes permiten pasar de un sistema de fuerzas, a otro, estáticamente equivalente.

1ª operación: **Traslación de una fuerza.**

No se altera el esfuerzo cinemático producido por una fuerza aplicada en un punto de un sólido rígido, trasladando su punto de aplicación a otro punto cualquiera de su recta de acción.

Por ejemplo, en una barra (fig. 9) supuesta rígida, y sometida a la acción de la fuerza P aplicada en A , es indiferente suponerla aplicada en A_1 , siempre que este punto pertenezca a la línea de acción de P .

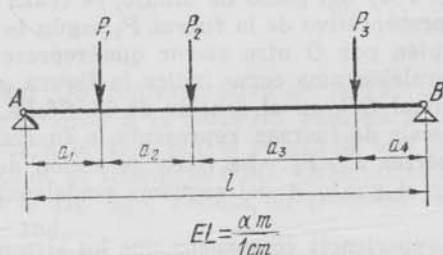


Fig. 8

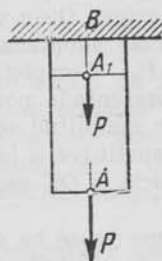


Fig. 9

La operación deja de ser válida, al suponer que la barra es deformable por la presencia de la fuerza P ; pues si ésta actúa en A la barra se deforma en toda su longitud, mientras que aplicada en A_1 sólo experimenta deformación, el trozo de barra comprendido entre A_1 y B .

En la Estática de los cuerpos rígidos, que estamos considerando, será pues indiferente la posición del punto de aplicación de cada fuerza pudiendo prescindirse de él y por tanto las fuerzas quedan identificadas conociendo tres parámetros:

- 1 — Recta de acción.
- 2 — Sentido.
- 3 — Intensidad.

2ª operación: Sustitución de dos fuerzas por una.

No se altera el efecto cinemático de dos fuerzas concurrentes al sustituirlas por una sola, según la diagonal del paralelograma construido con ellas.

Esta operación se conoce también con el nombre de *principio del paralelogramo*.

Sean las fuerzas P_1 y P_2 actuando en las líneas de acción 1 y 2 sobre la chapa C (fig. 10a). En virtud de la primera operación, podemos aplicar las dos fuerzas al punto A , intersección de 1 y 2.

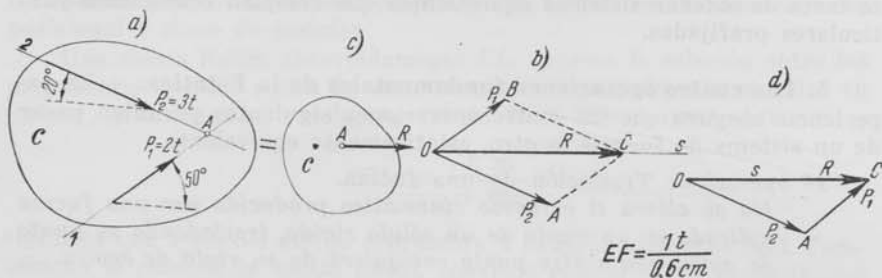


Fig. 10

Elegido un punto O (fig. 10b) del plano de dibujo, se traza a partir del *origen* O un vector representativo de la fuerza P_1 según la escala de fuerzas adoptada; y también por O otro vector que representa la fuerza P_2 . Completado el paralelogramo como indica la figura, el vector representado por la diagonal OC , en el sentido de la flecha, apreciada su magnitud según la escala de fuerzas, representa la fuerza única R que sustituye a las dos fuerzas P_1, P_2 . La línea de acción de R es la paralela a OC pasante por el punto A del esquema posicional (fig. 10a).

Como ya se ha dicho, la experiencia comprueba que los sistemas de fuerzas $a)$ y $c)$ de fig. 10 son *estáticamente equivalentes*. La fig. 10b se denomina *paralelogramo de las fuerzas*.

En la práctica la construcción de paralelogramo se limita al trazado de uno solo de los dos triángulos que aparecen en la fig. 10b. Así resulta el diagrama de fig. 10d, denominado *polígono vectorial* de las fuerzas P_1 y P_2 , o brevemente *vectorial*.

El punto O es el *origen* del vectorial; C su extremo; la fuerza R se denomina *resultante* de las fuerzas P_1, P_2 ; éstas son las *componentes* de R según las direcciones 1 y 2.

El vectorial de la fig. 10d se denomina *vectorial abierto* porque los sentidos de las componentes se dirigen al extremo C del vector de la resultante R .

La operación descrita se denomina *composición de fuerzas* o *determinación de la resultante* y es aplicable a toda clase de cuerpos: sólidos rígidos o deformables, líquidos y gases.

En resumen: el vectorial trazado, según la escala de fuerzas, a partir de cualquier punto O del plano, sirve para obtener: la dirección s de la resultante R , su intensidad (segmento OC) y su sentido que se dirige del origen O hacia el extremo C . Para ubicar la resultante R en su verdadera posición es necesario acudir al esquema posicional, trazando por A una paralela a OC que fija la recta de acción de R , siendo su sentido el del vector OC .

La operación inversa de la composición se denomina *descomposición de fuerzas* o *determinación de componentes* y su enunciado es el siguiente: *una fuerza es estáticamente equivalente a otras dos fuerzas según direcciones previamente fijadas.*

Sean: P la fuerza; 1 y 2 las direcciones fijadas a las dos fuerzas estáticamente equivalentes de la P (fig. 11a). Trazado por O (fig. 11b)

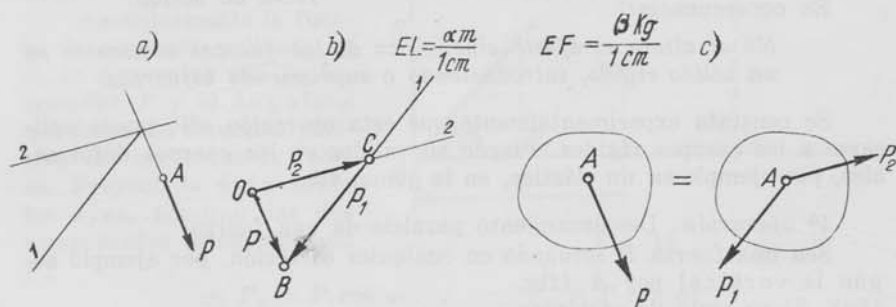


Fig. 11

el vector OB representativo de la fuerza P , según escala de fuerzas, por el extremo B la recta BC paralela a una de las direcciones fijadas, digamos a la 1, y por el origen O una paralela a la otra dirección 2, se obtiene el triángulo OBC . Orientando los segmentos OC y CB como indica la fig. 11b, resulta un polígono *vectorial abierto* análogo al de la fig. 10d.

Los vectores P_1 y P_2 señalan el sentido y la magnitud, ésta apreciada en la correspondiente escala de fuerzas, de las dos fuerzas equivalentes a la P , que estarán aplicadas en un punto A de la recta de acción de P . Los sistemas c) de fig. 11 son pues estáticamente equivalentes.

En consecuencia:

No se altera el efecto cinemático de una fuerza al sustituirlo por dos fuerzas de direcciones arbitrarias, pero concurrentes con la línea de acción de aquella.

3ª operación: Introducción o supresión de bifuerzas.

Supuesto que en el sistema de fuerzas de la fig. 12, las fuerzas P_1 y P_3 son iguales y opuestas, la 2ª operación de la Estática asegura que su resultante es nula; luego podrán suprimirse. Los sistemas a) y b) de fig. 12 son pues estáticamente equivalentes.

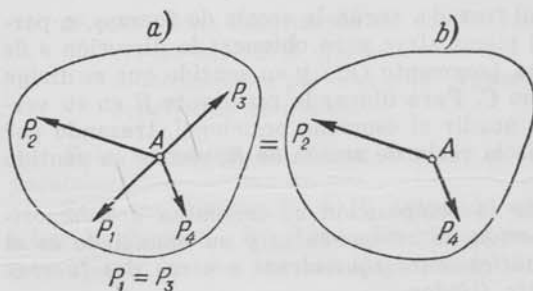


Fig. 12

En consecuencia:

No se altera el efecto cinemático de las fuerzas existentes en un sólido rígido, introduciendo o suprimiendo bifuerzas.

Se constata experimentalmente que esta operación sólo puede aplicarse a los cuerpos rígidos. Pierde su validez en los cuerpos deformables, por ejemplo en un elástico, en la goma, etc.

4ª operación: Desplazamiento paralelo de una fuerza.

Sea una fuerza P actuando en cualquier dirección, por ejemplo según la vertical por A (fig. 13a). Si su recta de acción se desplaza paralelamente a sí misma hasta el punto B del cuerpo C , el sistema obtenido (fig. 13b) no es equivalente al a). Pero procedamos en la siguiente forma: manteniendo la fuerza P en su posición dada, apliquemos en el punto B una bifuerza (fig. 13c), el sistema resultante, por la 3ª operación, es equivalente al a).

El nuevo sistema de fuerzas (fig. 13c) está constituido por una fuerza P , en B , dirigida hacia abajo y por una cupla (fuerzas P en A y P en B , ésta hacia arriba) de momento $M = -Pa$ (fig. 13d) que es equivalente al a).

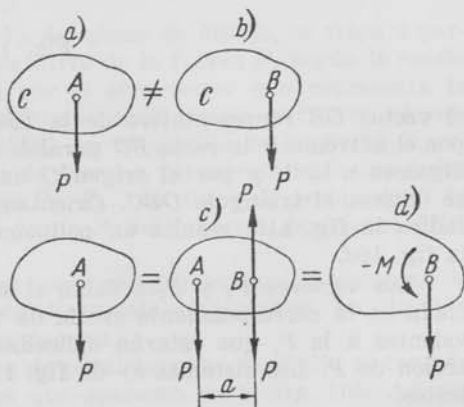


Fig. 13

Por consiguiente:

No se altera el efecto cinemático de una fuerza P , desplazándola paralelamente a su línea de acción, a la distancia a , siempre que se agregue una cupla de momento Pa .

La inversa de esta operación se estudiará en página 32.

Las cuatro operaciones establecidas permiten pasar, por aplicaciones sucesivas, de un sistema de fuerzas a otro sistema estáticamente equivalente, vale decir de igual efecto cinemático que el primero. El problema primordial de la Estática consiste en la aplicación metódica de aquellas operaciones elementales, hasta obtener un sistema de fuerzas, conforme a los propósitos que se tengan en vista.

6. Representación analítica de fuerzas. — El procedimiento más sencillo es referir la fuerza P a un par de ejes ortogonales xOy (fig. 14).

Analíticamente la fuerza P , supuesta aplicada en O , se determina por su intensidad P y el ángulo α que forma la dirección positiva del eje x con la fuerza. Proyectada ésta sobre los ejes, resultan las dos componentes ortogonales de P :

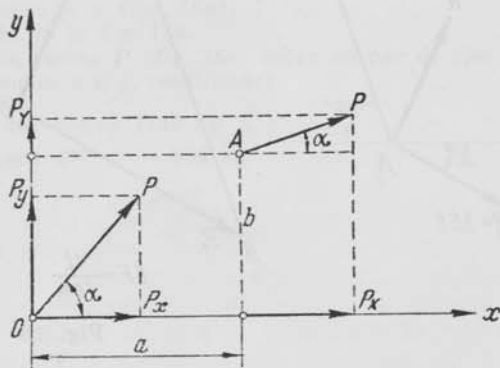


Fig. 14

$$\pm P_x = P \cos \alpha \quad ; \quad \pm P_y = P \sin \alpha ;$$

cuyo signo depende del ángulo α .

Si la fuerza está aplicada en A , será necesario fijar las coordenadas a, b de este punto.

Inversamente: conocida las dos componentes ortogonales P_x y P_y , de una fuerza P , ésta queda determinada en posición, sentido y magnitud por las igualdades:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{P_y}{P_x} \quad ; \quad P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

De todo lo anterior se deduce que las operaciones a realizar con las fuerzas, podrán efectuarse *gráficamente* mediante escalas adecuadas de fuerzas o *analíticamente* con ayuda de un par de ejes coordenados, elegido según convenga. Se aplicará uno u otro procedimiento a voluntad; en muchos casos ambos métodos para controlar los resultados.

EJEMPLO 1. — Determinar la resultante de las fuerzas P_1 y P_2 (fig. 15), gráfica y analíticamente.

El procedimiento gráfico consiste en la construcción de un polígono vectorial (fig. 15b). El vector de origen O extremo C , apreciado en la escala de fuerzas, fija la intensidad de R que resulta $R = 3,2$ t.

Su recta de acción es la paralela por A a la directriz OC del vectorial y su sentido el ya indicado.

Para resolver analíticamente el problema, refiramos el vectorial de las fuerzas P_1 ; P_2 (fig. 15c) a un par de ejes ortogonales x, y cuyo origen convenimos en hacerlo coincidir con el origen del vectorial.

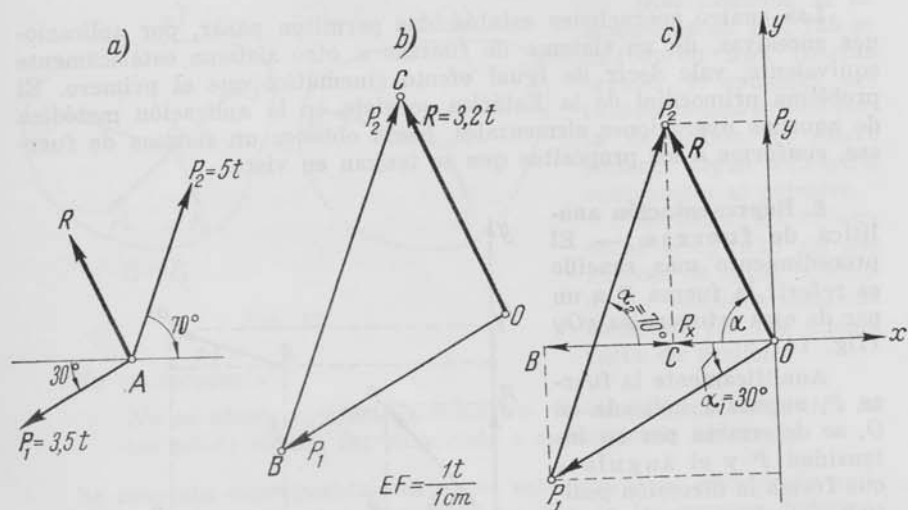


Fig. 15

Proyctemos éste sobre los ejes x e y :

$$\begin{cases} -P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = P_x \\ -P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 = P_y \end{cases}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{cases} -3,5 \cos 30^\circ + 5 \cos 70^\circ = P_x \\ -3,5 \sin 30^\circ + 5 \sin 70^\circ = P_y \end{cases}$$

Resultando:

$$\begin{cases} P_x = -1320 \text{ kg} \\ P_y = +2945 \text{ kg} \end{cases}$$

como componentes ortogonales de la resultante R .

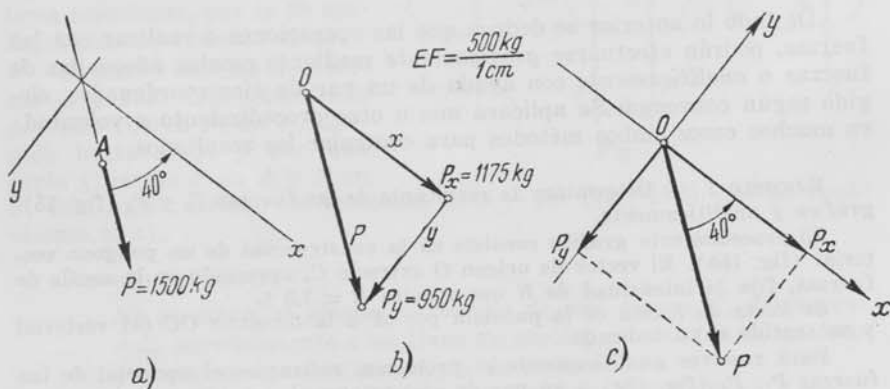


Fig. 16

El ángulo α vale:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2945}{1320} = 2,23 \quad ; \quad \alpha \cong 65^{\circ}50'$$

La magnitud de R es:

$$R = \sqrt{1320^2 + 2945^2} = 3227 \text{ kg}$$

EJEMPLO 2. — Dada la fuerza $P = 1,5 \text{ t}$ determinar sus dos componentes ortogonales según las direcciones x, y (fig. 16a).

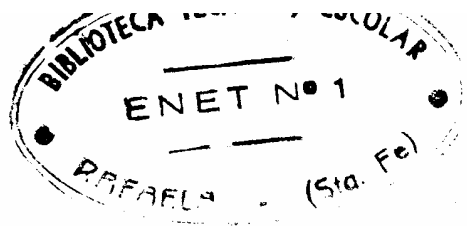
La solución gráfica está dada en la fig. 16b.

Analíticamente, se proyecta la fuerza P (fig. 16c) sobre un par de ejes paralelos a las direcciones ortogonales x e y , resultando:

$$P_x = 1500 \cos 40^{\circ} = 1149 \text{ kg} \quad ,$$

$$P_y = 1500 \operatorname{sen} 40^{\circ} = -964 \text{ kg}$$





CAPÍTULO IX

REACCIONES VINCULARES

25. Vínculos. — Cualquier elemento estructural: viga, columna, armadura..., que forma parte de un todo, debe satisfacer, para cumplir sus fines, ciertas condiciones:

a) Cada elemento tiene que estar en *equilibrio estático*, vale decir en reposo (no interesan las deformaciones elásticas), para lo cual es necesario *vincular* o *apoyar* aquellos elementos entre sí y con el suelo.

b) El equilibrio debe ser estable, exigencia que impone vínculos de eficiente realización práctica.

c) No debe sufrir tensiones que excedan los límites admisibles de trabajo, para evitar posibles *deformaciones* perjudiciales, de carácter permanente.

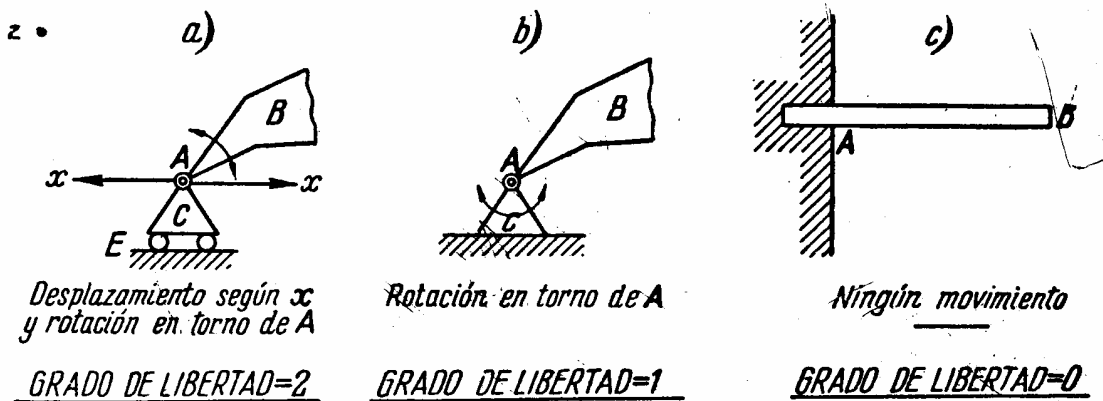


Fig. 68

Los vínculos o apoyos son dispositivos materiales que reducen total o parcialmente la libre movilidad de un elemento estructural y quedan caracterizados por el número de movimientos que le permiten realizar. Este número de movimientos libres se denomina *grado de libertad* del vínculo.

2. El apoyo representado esquemáticamente en la fig. 68a, está formado por una pieza *C* que apoya, mediante rodillos, sobre una superficie fija *E*, y unida por intermedio de una articulación o perno *A*, al elemento estructural *B*.

Constituye un vínculo con *dos grados de libertad*: pues sólo permite a la pieza *B*, un desplazamiento horizontal sobre los rodillos y una ro-

tación con eje en el perno A. Se denomina *articulación móvil de apoyo* o *apoyo móvil de resbalamiento*.

El apoyo de la fig. 68b, sólo se distingue del anterior por la ausencia de rodillos, estando la pieza C sólidamente fijada al suelo E. Es un vínculo con un *grado de libertad*, porque únicamente permite a la pieza B una rotación en torno de la articulación A. Se denomina *articulación fija de apoyo* o *apoyo fijo*.

El apoyo de fig. 68c, constituye un vínculo fijo al suelo impidiendo todo desplazamiento o rotación a la pieza B. Su grado de libertad es cero. Se denomina *apoyo de empotramiento*.

26. Reacciones vinculares. — *Presión sobre un apoyo* es la fuerza transmitida a éste por las cargas que inciden sobre el elemento estructural B (fig. 68). La fuerza opuesta de igual intensidad a la presión, o sea su equilibrante, se denomina *reacción de apoyo*.

Las reacciones de apoyo son, pues, fuerzas que actuando en los vínculos en sustitución de éstos, equilibran a las cargas. Por su carácter de equilibrantes impiden el movimiento de la pieza B, manteniéndola fija (excepto las deformaciones elásticas).

En el caso de la articulación móvil (fig. 69a), si la presión P , transmitida al apoyo por las cargas, actúa con una inclinación α , P ad-

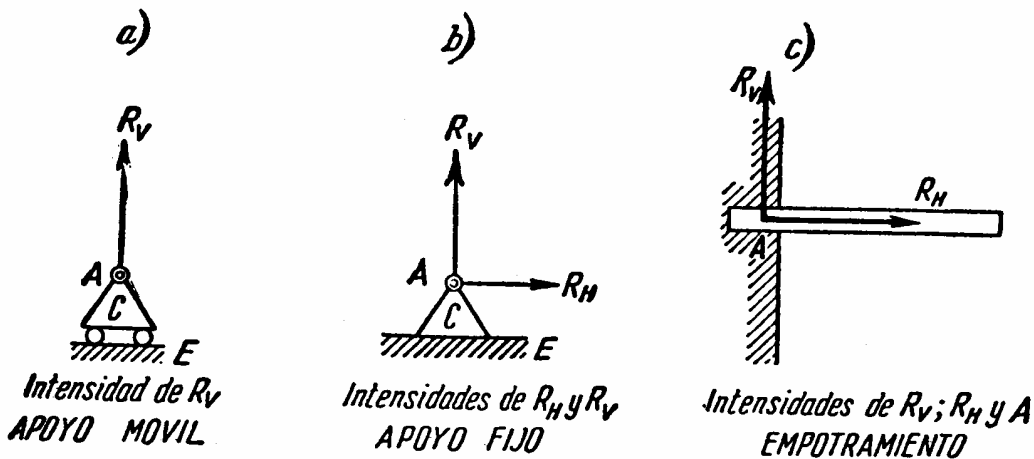


Fig. 69

mite una componente vertical P_v absorbida por el suelo y otra horizontal P_h que desplaza el apoyo en su dirección, destruyendo el equilibrio.

Éste subsistirá siempre que la presión P actúe perpendicularmente a la superficie E de apoyo.

Por consiguiente la reacción de una articulación móvil, tendrá que ser vertical (si E es horizontal) dirigida hacia arriba (en el supuesto de la figura) y pasante por A. Quiere decir que de la reacción R sólo es necesario calcular su *intensidad*. Un apoyo móvil presenta una sola incógnita.

En el caso del apoyo fijo (fig. 69b)

Como A es un punto de paso de la presión P , el momento de esta respecto de A , es nulo; también será nulo el momento ~~en A de la reacción R~~ ¹⁵⁸; R pasa por A .

De la reacción R , pues, sólo se conoce el punto A de su recta de acción, ignorándose la *dirección* de ésta (α), y la *intensidad*. Un apoyo fijo presenta dos incógnitas.

Por último en el apoyo de empotramiento se desconoce el punto de aplicación A de la reacción, la *dirección* (α) y la *intensidad*. Un apoyo de empotramiento presenta tres incógnitas.

27. Determinación de reacciones. — La determinación puede hacerse analítica o gráficamente.

Como el conjunto de fuerzas formado por las cargas actuantes en la barra y las reacciones originadas en los apoyos, constituye un sistema en equilibrio, bastará aplicar a este sistema las condiciones generales de equilibrio estudiadas en los capítulos IV y VII.

Procediendo analíticamente se utilizará uno de los sistemas de ecuaciones [1], [2] o [3] del parág. 19 según convenga, cuando el sistema es concurrente. Si no es concurrente se acude a las [5], [6] o [7] del parág. 20, eligiendo de éstos, el sistema de ecuaciones más conveniente.

En el caso de sistemas no concurrentes de fuerzas, sabemos que cada condición de equilibrio: [5], [6] o [7], está formada por tres ecuaciones que admitirán solución cuando en ellas aparezcan sólo tres incógnitas y no más. En tal supuesto, si el conjunto de las reacciones presenta también tres incógnitas (línea de acción, sentido, intensidad), éstas quedarán determinadas por aquellas ecuaciones.

En el caso de sistemas concurrentes de fuerzas, cada condición de equilibrio: [1], [2] o [3], está formada por dos ecuaciones, que admiten solución, si en ellas aparecen dos incógnitas y no más. Entonces si las reacciones ofrecen también dos incógnitas, éstas son calculables por aquellas ecuaciones.

• Una barra (viga, columna...) se dice *estáticamente determinada* o *sistema isostático* cuando las ecuaciones de equilibrio de la Estática permiten determinar los tres elementos de cada reacción: recta de acción, intensidad y sentido.

El procedimiento gráfico para determinar reacciones consiste, según el Cap. IV, en la construcción de un vectorial cerrado si las fuerzas concurren a un punto; y si éstas no son concurrentes es necesario que ambos polígonos vectorial y funicular, sean cerrados.

EJEMPLO 17. — Se la viga AB (fig. 70), de luz $l = 6$ m (distancia entre apoyos), cargada con una fuerza $P = 3$ t, que actúa a la distancia $a = 2$ m del apoyo izquierdo A . Supuestos apoyos horizontales, determinar las reacciones. Una viga con un apoyo fijo y el otro móvil, se dice *simplemente apoyada*.

Designemos con R_A la reacción en A y con R_B la del apoyo B . Empecemos por averiguar si las reacciones pueden obtenerse con las ecuaciones de equilibrio de la Estática.

Como las fuerzas P , R_A , R_B forman un sistema en equilibrio: sus tres líneas de acción tienen que ser concurrentes.

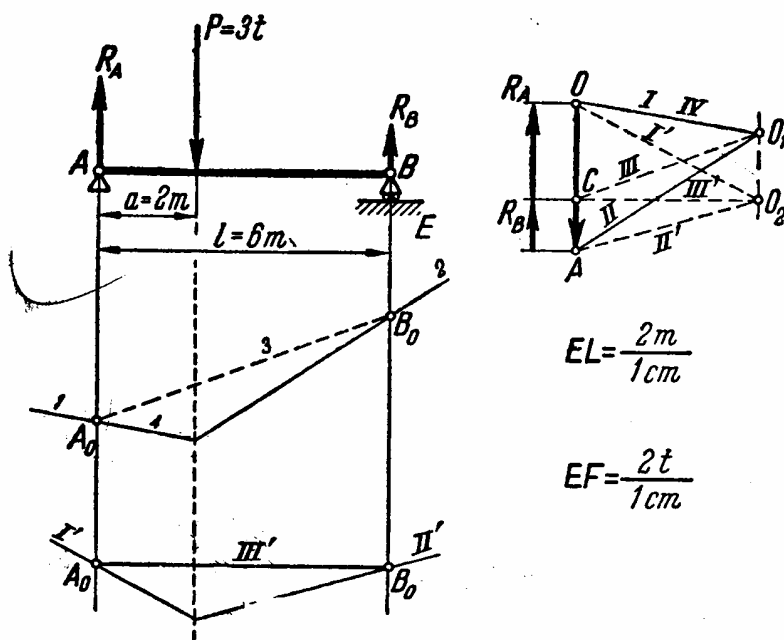


Fig. 70

La recta de acción de R_B , por lo dicho en parág. 26, es perpendicular a la superficie horizontal de resbalamiento E ; luego es paralela a la fuerza P . El punto de encuentro de P y de R_B , debe serlo también de R_A , para que exista equilibrio; luego las tres fuerzas P , R_A y R_B son paralelas.

Conocidas las líneas de acción de R_A y R_B falta determinar la magnitud respectiva; es decir, dos incógnitas. Luego la viga es *estáticamente determinada*.

Elegimos las ecuaciones [3] del parág. 19 y como centros de momentos los apoyos A y B . Se tendrá:

$$\begin{cases} \sum M_A = P \cdot a + R_B \cdot l = 3 \cdot 2 \text{ tm} - R_B \cdot 6 \text{ tm} = 0 \\ \sum M_B = -P(l-a) + R_A \cdot l = -3 \cdot 4 \text{ tm} + R_A \cdot 6 \text{ tm} = 0 \end{cases}$$

De donde:

$$R_B = \frac{P \cdot a}{l} = \frac{6 \text{ tm}}{6 \text{ m}} = 1 \text{ t} \quad [1]$$

$$R_A = \frac{P(l-a)}{l} = \frac{12 \text{ tm}}{6 \text{ m}} = 2 \text{ t} \quad [2]$$

El sentido de las reacciones es hacia arriba, para equilibrar la carga P .

Gráficamente, las ecuaciones se obtienen dibujando un vectorial, origen O , de la fuerza P , y un polar de polo O_1 ; de lo cual resulta el funicular de lados 1 y 2 (fig. 70). Interceptados éstos con las verticales por A y B , quedan fijados los puntos A_0 y B_0 ; cuya unión constituye la línea de cierre 3 del funicular. Una paralela: III, a ésta, por O_1 ubica el punto C , sobre el vectorial. Los vectores AC y CO , medidos en la escala de fuerzas, indican

EJEMPLO 18. — Determinar las reacciones, en la viga simplemente apoyada, esquematizada en la fig. 71.

Gráficamente: la reacción en B es perpendicular a la superficie de rodamiento del apoyo mismo; luego por el punto C, intersección de P con R_B , pasa la recta sostén de la R_A (tres fuerzas en equilibrio son concurrentes). Conocidas las rectas de acción de R_A y R_B , será suficiente descomponer P

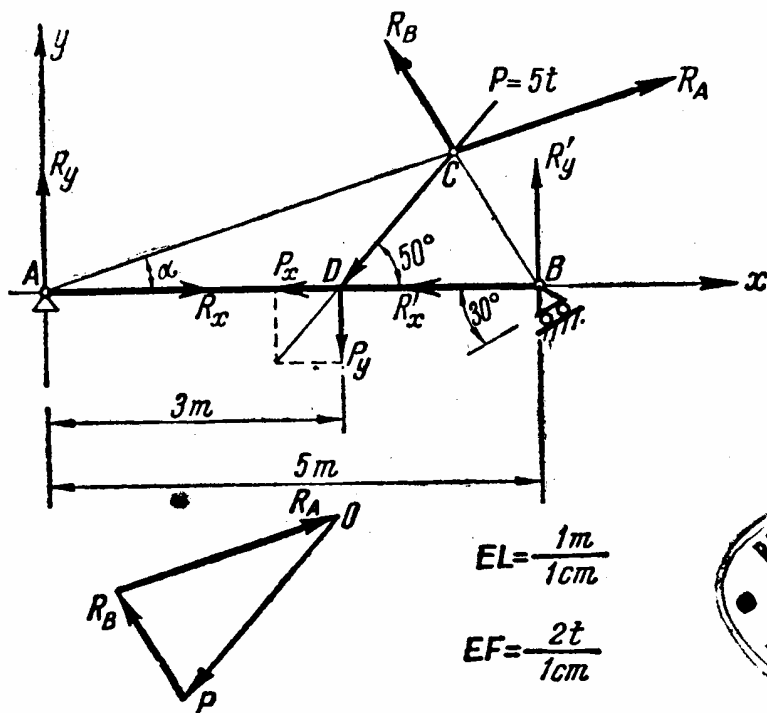


Fig. 71

en estas direcciones, y una vez cerrado el vectorial, se obtienen en él (según la escala de fuerzas) las intensidades $R_A = 4,8 t$ y $R_B = 2,7 t$.

Analíticamente: la reacción en A presenta dos incógnitas: intensidad y dirección; la reacción en B, normal a la superficie de resbalamiento, una sola: su intensidad. Las tres incógnitas se obtienen aplicando las tres condiciones analíticas de equilibrio vistas en el parág. 20.

Utilizaremos las ecuaciones [5] del parág. 20: dos ecuaciones de proyección y una de momentos.

Previamente se sustituyen las fuerzas P, R_A, R_B por sus componentes según x e y :

$$\begin{aligned} P(P_x, P_y) \\ R_A(R_x, R_y) \\ R_B(R'_x, R'_y) \end{aligned}$$

Si el centro de momentos se elige en el apoyo A, las ecuaciones [5] de página 42, resultan:

$$\begin{cases} R_x - 5 \cos 50^\circ - R_B \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ R_y - 5 \sin 50^\circ + R_B \sin 60^\circ = 0 \\ 5 \cdot \sin 50^\circ \cdot 3 \text{ m} - R_B \sin 60^\circ \cdot 5 = 0 \end{cases} \quad [3]$$

De la 3ª se obtiene la intensidad de la reacción en B:

$$R_B = \frac{11,49 \text{ tm}}{4,33 \text{ m}} = 2650 \text{ kg};$$

que llevada a la primera ecuación en [3] determina la componente horizontal R_x de R_A :

$$R_x = 3215 \text{ kg} + 1325 \text{ kg} = 4540 \text{ kg}.$$

A su vez el valor de R_B sustituido en la 2ª ecuación de [3] fija el valor de la componente R_y de R_A :

$$R_y = 3830 \text{ kg} - 2295 \text{ kg} = 1535 \text{ kg}.$$

Por último la intensidad de R_A resulta igual a:

$$R_A = \sqrt{4540^2 + 1535^2} = 4790 \text{ kg};$$

y su posición; α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1535}{4540} = 0,349 \quad ; \quad \alpha \cong 19^\circ.$$

EJEMPLO 19. — Determinar las reacciones de la viga con doble voladizo, según esquema de fig. 72.

Las partes en voladizo son AC y BD, así denominadas porque los extremos C y D carecen de apoyos.

El procedimiento gráfico puede seguirse en la fig. 72. Los puntos A_0 y B_0 que fijan la línea de cierre 5 del funicular, resultan, como se sabe, al

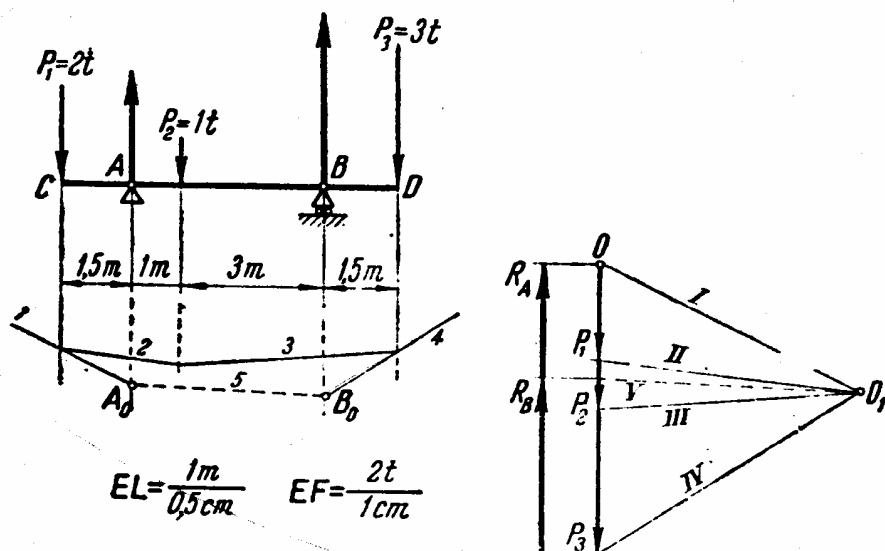


Fig. 72

interceptar la vertical por A con el primer lado del funicular y la vertical por B con el último lado 4, del funicular correspondiente a las cargas de la viga. Se obtienen $R_A = 2400 \text{ kg}$ y $R_B = 3600 \text{ kg}$.

ficientes dos ecuaciones (parág. 19), por ejemplo las [3]. Fijando centros de momentos en A y B resulta:

$$\Sigma M_A = -2 \cdot 1,5 \text{ tm} + 1 \cdot 1 \text{ tm} - 4R_B \text{ tm} + 3 \cdot 5,5 \text{ tm} = 0$$

$$\Sigma M_B = -2 \cdot 5,5 \text{ tm} + 4R_A - 1 \cdot 3 \text{ tm} + 3 \cdot 1,5 \text{ tm} = 0;$$

de donde:

$$R_A = 2375 \text{ kg} \quad ; \quad R_B = 3625 \text{ kg}.$$

EJEMPLO 20. — Determinar las reacciones de una viga empotrada en A , según esquema de fig. 73a.

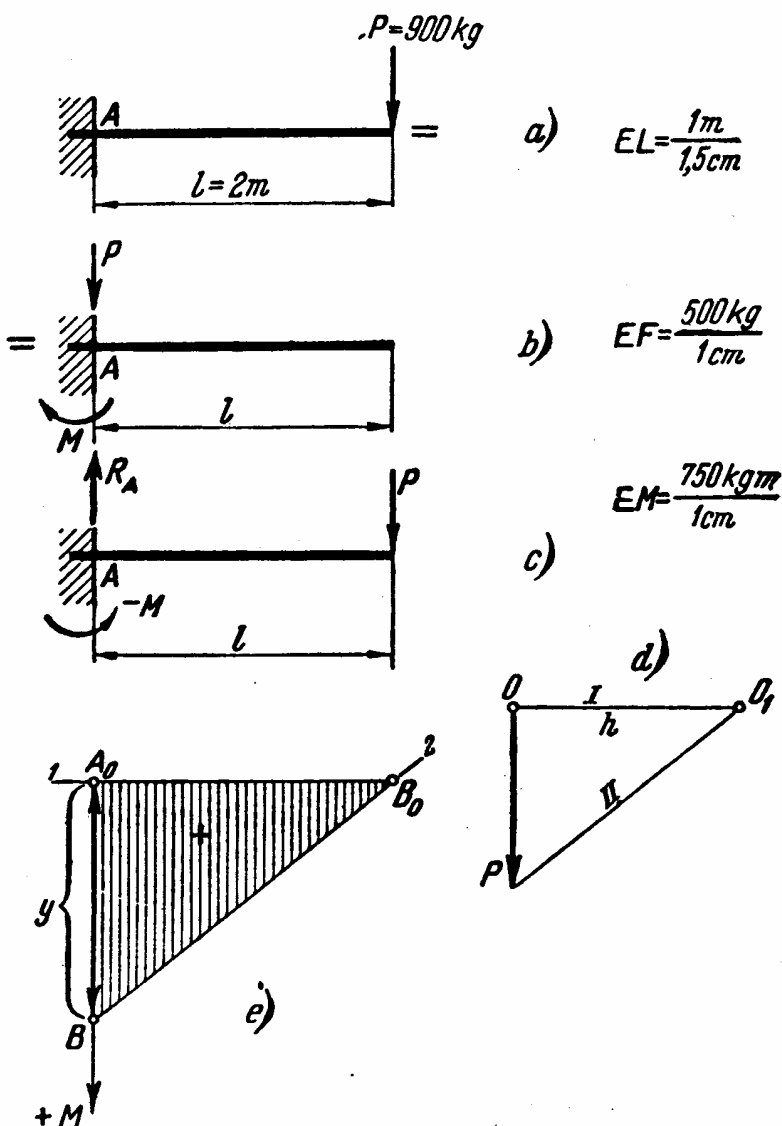


Fig. 73

Transportada la fuerza P (conforme a la cuarta operación elemental) a la sección A de empotramiento, resulta el sistema equivalente de la fig. 73b, constituido por una fuerza P en A y una cupla de transporte cuyo momento M vale $+Pl$ que se denomina *momento de empotramiento*.

La fuerza R_A reacción en A , opuesta a la P (fig. 73c), y el momento $-M$, son equilibrantes del sistema dado:

$$R_A = -P = -900 \text{ kg}$$

$$-M = -Pl = -1800 \text{ kgm.}$$

Gráficamente se construye el vectorial de origen O , correspondiente a la única fuerza P ; y el polar I, II (fig. 73d), con lo cual queda determinado el funicular de lados 1 y 2 (fig. 73e).

El momento de empotramiento, momento de P respecto de A , se obtiene (ver parág. 14) interceptando la vertical por A con los lados 1 y 2 del funicular: la ordenada y , apreciada en la escala de momentos, fija el valor: $M=1800 \text{ kgm.}$

CAPÍTULO XI

ESFUERZO CORTANTE - MOMENTO FLEXOR

32. Fuerzas exteriores. — Consideremos el sistema material de fig. 81, constituido por una viga y sus dos apoyos. Las fuerzas P_1 y P_2 que inciden en la viga, provenientes por ejemplo, de sendas columnas descansando en C y D , son fuerzas originadas por cuerpos exteriores al sólido *viga-apoyo*: se denominan *fuerzas exteriores* a este último sólido.

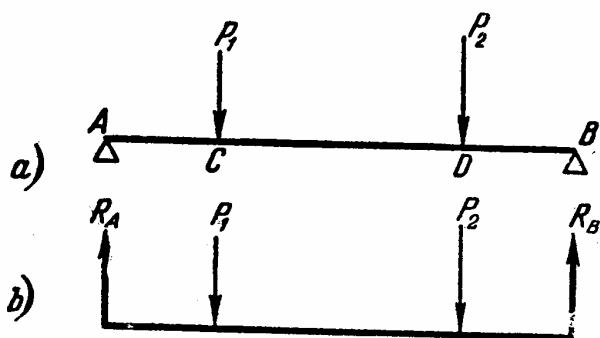


Fig. 81

Si aislamos la viga de sus apoyos, sustituyéndolos por sus respectivas reacciones R_A y R_B , que dichos apoyos ejercen sobre la viga, ésta se presenta como un sólido (fig. 81b) sometido a la acción de las fuerzas P_1 , P_2 , R_A , R_B , todas provenientes de cuerpos exteriores a la viga misma. Luego las reacciones son exteriores a la viga.

Por consiguiente, se denominan fuerzas exteriores a un sólido las ejercidas sobre él, por otros cuerpos no solidarios con aquél. En particular P_1 y P_2 se denominan *cargas*; y se dice que la viga está *solicitada* por el sistema de cargas P_1 , P_2 y de reacciones R_A , R_B ; sistema, como sabemos, en equilibrio.

33. Cargas distribuidas. — Las fuerzas consideradas hasta ahora se denominan *fuerzas concentradas* por estar localizadas en un punto. Además, de éstas pueden presentarse *fuerzas distribuidas*: presión del agua sobre una superficie, empuje de tierras sobre un muro, peso propio de una viga, etc.

En particular, las cargas distribuidas sobre una viga, pueden representarse gráficamente, trazando en cada punto de la misma, una ordenada representativa, a escala, de la intensidad p que soporta (la unidad de longitud de viga) (fig. 82a).

Resulta una línea c denominada *línea de carga*, que representa la ley de variación de la carga p a lo largo de la viga.

Si los valores de p se suceden en forma continua será expresable por una función $p = f(x)$. Cuando p es constante a lo largo de la viga, la línea de carga es una horizontal (fig. 82c).

Un elemento, dx , de longitud de viga estará, por consiguiente, solicitado por la fuerza $dP = p \cdot dx$, y toda la viga estará solicitada por la fuerza:

$$P = \int_0^l p dx. \quad [1]$$

Como el producto $p dx$ (fig. 82a), mide el área de un elemento dA , de superficie, la carga total P , vale:

$$P = \int dA = A. \quad [2]$$

La superficie ACBA (fig. 82a) se denomina *superficie de carga*. Si se considera una porción de esta superficie, limitada por dos ordenadas MJ y NK (fig. 82b) superficie JMKN, ella podrá reemplazarse por una carga concentrada, cuya intensidad P está dada por el área de la superficie rayada en la fig. 82b y aplicada en el centro de gravedad G de la misma.

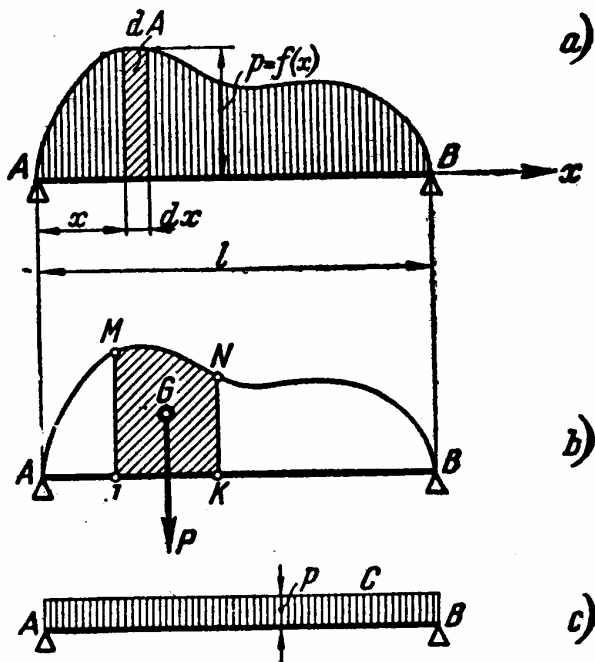


Fig. 82

34. Definición de momento flexor y de esfuerzo cortante. — Considérese una viga horizontal solicitada por las cargas P_1, \dots, P_4 y por las reacciones R_A y R_B , todas contenidas en un plano vertical pasante por el eje geométrico, AB, de la viga. El conjunto determina un sistema plano de fuerzas en equilibrio.

Imaginando seccionada la viga por un corte S comprendido entre dos fuerzas sucesivas, designemos con R_1 (fig. 83a) la resultante de las fuerzas exteriores, R_A, P_1, P_2 , situadas a la izquierda del corte S , o sea en el trozo AS de viga; y con R_2 la resultante de las situadas a la derecha de S (trozo SB). Como el total de las fuerzas exteriores está en equilibrio, las fuerzas R_1 y R_2 serán iguales en magnitud, de sentido contrario y colineales.

Trasladando R_1 al centro de gravedad (fig. 83b) G de la sección S (4ª operación elemental de la Estática) se introduce un par de traslación cuyo momento es M_1 .

El sistema formado por R_1 (aplicado en G) y la cupla M_1 , constituyen un sistema equivalente al R_A, P_1 y P_2 —

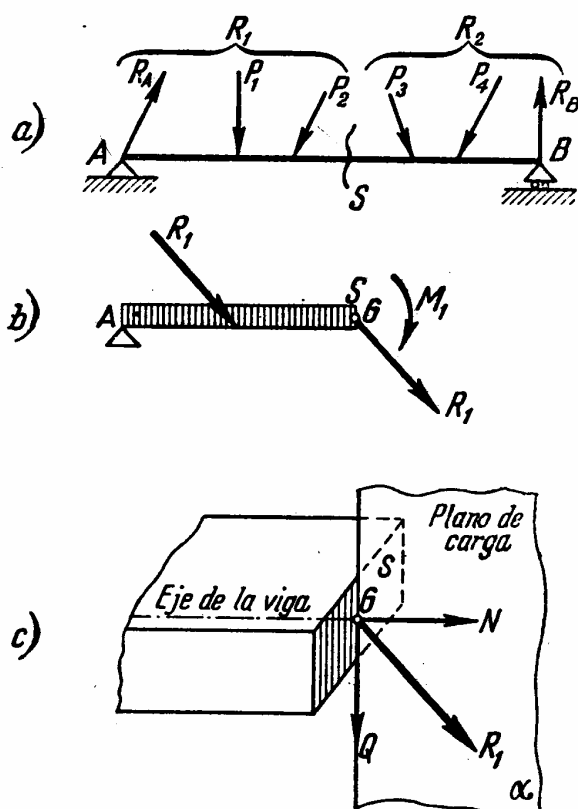


Fig. 83

La cupla de traslación se denomina *cupla de flexión*, y el valor de su momento: *momento flexor* o *flector* en la sección *S*. Convendremos en asignarlo signo positivo, se tiende a hacer girar la parte izquierda *AS* de viga, en el sentido de la flecha curvilínea de fig. 83b, que es el sentido de movimiento de las agujas del reloj. Negativo será el opuesto.

La fuerza R_1 en *G* y contenida en el *plano α de carga* o *de sollicitación* (fig. 83c), admite dos componentes: *N* según el eje de la viga y *Q* perpendicular a este eje, es decir a *N*, y situada *Q*, en el plano de la sección *S*. Nótese que *N* y *Q* son también componentes de las fuerzas R_A , P_1 , P_2 , pasantes por *G*.

La fuerza *Q* se denomina *esfuerzo de corte* o *cortante* o *tangencial*.

Lo consideramos positivo si tiende a cortar hacia arriba, el tramo izquierdo, *AS*, de viga. En la fig. 83c, *Q* es negativo.

Todo lo anterior puede aplicarse a la parte derecha de viga, *SB*, cambiando el signo a M_1 y a R_1 , puesto que la estructura *AB* está en equilibrio.

En conclusión:

Momento flexor en la sección S de una viga, es el momento de todas las fuerzas exteriores actuantes a la izquierda de S, respecto del baricentro de S (o a la derecha con el signo contrario).

Esfuerzo de corte en la sección S de una viga, es la componente vertical, aplicada en el baricentro de S, de todas las fuerzas actuantes a la izquierda de S (o de las fuerzas situadas a la derecha de S con signo contrario).

35. Determinación gráfica del momento flexor y del esfuerzo cortante. — Sea la viga *AB* (fig. 84) simplemente apoyada, solicitada por las cargas P_1 , P_2 y P_3 .

Ante todo es necesario equilibrar las cargas, determinando las reacciones R_A y R_B . Mediante una escala conveniente de fuerzas, se traza el vectorial de las cargas: el vector *OA* representa la resultante de

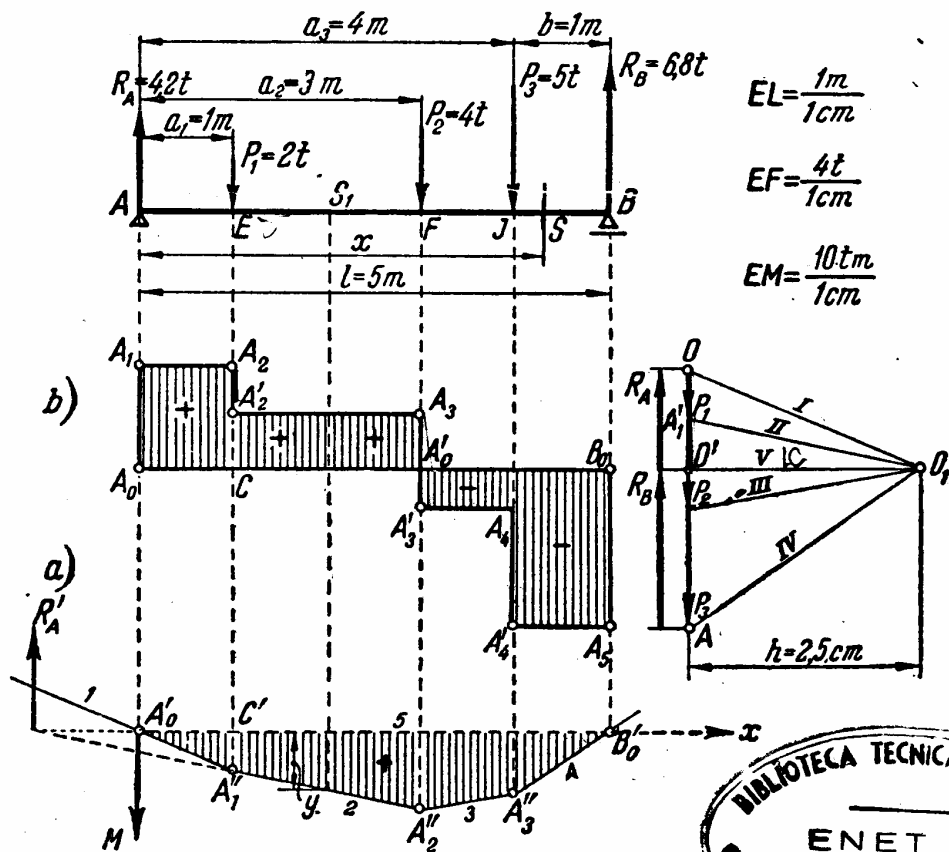


Fig. 84

todas éstas. Proyectando el vectorial desde un polo O_1 podrá trazarse el funicular de lados 1, 2, 3, 4 (fig. 84a). La intersección A'_0 de su primer lado 1, con la vertical por A; y la intersección B'_0 del último lado, 4, con la vertical por el apoyo B, determinan la línea de cierre 5, del funicular. Una paralela a ésta por O_1 señala sobre la resultante OA el punto D' , que fija las reacciones R_A y R_B en magnitud, dirección y sentido: $R_A = 4,2 \text{ t}$, $R_B = 6,8 \text{ t}$.

El diagrama rayado de fig. 84a, es el diagrama de momentos flexores. Para utilizarlo se construye previamente la escala de momentos, multiplicando las escalas lineal y de fuerzas por la distancia polar $h = 2,5 \text{ cm}$.

Si se quiere determinar el momento flexor en S_1 bastará trazar la vertical por este punto, hasta interceptar los lados 5 y 2 del funicular, que comprenden a las fuerzas R_A y P_1 situadas a la izquierda de S. La longitud de la ordenada y , apreciada en la escala de momentos, fija el valor M del momento pedido:

$$M = y \cdot EM = 0,6 \text{ cm} \frac{10 \text{ tm}}{1 \text{ cm}} = 6 \text{ tm}.$$

Obsérvese (fig. 84a), que a este momento corresponde signo positivo; como así también el momento flexor de cualquier otra sección de la viga.

Pasemos a determinar gráficamente el esfuerzo cortante en una sección S . Como todas las fuerzas exteriores son verticales, el esfuerzo axial N , de fig. 83c, resulta nulo; el esfuerzo cortante Q también será vertical.

Entonces, trazada una horizontal de referencia A_0B_0 (fig. 84b) por D' , no hay más que proyectar horizontalmente el origen O del vectorial: en A_0A_1 se tiene en magnitud y sentido el esfuerzo cortante en una sección muy próxima al apoyo A . El valor R_A se mantiene constante hasta la vertical P_1 . Trazando por A'_1 una horizontal, queda determinado el punto A_3 : la ordenada A'_0A_3 es el esfuerzo cortante a la izquierda de P_2 y $A'_0A'_3$ a su derecha. Así siguiendo resulta el diagrama de esfuerzos cortantes de la fig. 84b. La zona positiva señala el trozo de viga en donde los esfuerzos de corte se dirigen hacia arriba; a la inversa en la negativa.

36. Determinación analítica del momento flexor y del esfuerzo cortante. — Para obtener las reacciones se aplican las ecuaciones de equilibrio del parág. 19, pues sólo existen dos incógnitas: intensidad de cada reacción. Utilizando las [3] del parág. 19:

$$M_A = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 - R_Bl = 0 \quad [1]$$

$$M_B = R_Al - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) - P_3(l - a_3) = 0; \quad [2]$$

de donde:

$$R_B = \frac{\Sigma Pa}{l} = \frac{2 \cdot 1 \text{ tm} + 4 \cdot 3 \text{ tm} + 5 \cdot 4 \text{ tm}}{5 \text{ m}} = 6,8 \text{ t} \quad [3]$$

$$R_A = \frac{\Sigma P(l - a)}{l} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{5 \text{ m}} \text{ tm} = 4,2 \text{ t}. \quad [4]$$

Pasando al *momento flexor* en una sección S distante x del apoyo A , se tendrá, según su definición, la siguiente ecuación lineal:

$$\begin{aligned} M_x &= R_Ax - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - P_3(x - a_3) = \\ &= R_Ax - \Sigma P(x - a). \end{aligned} \quad [5]$$

Por ejemplo, si $x = 3,50 \text{ m}$, resulta:

$$M = 4,2 \cdot 3,50 \text{ tm} - 2 \cdot 2,50 \text{ tm} - 4 \cdot 0,5 \text{ tm} = 7700 \text{ kgm}$$

como valor para el momento flexor en S .

En particular si x está comprendida entre A y E , el momento flexor, según la [5], se reduce a la ecuación lineal:

$$M_x = R_Ax \quad [6]$$

que referida al par de ejes xA'_0M (fig. 84a), está representada por el segmento $A'_0A''_1$, pues para $x = 0$, resulta:

$$M_x = 0: \quad \text{punto } A'_0;$$

y para $x = a_1 = 1$ m, resulta:

$$M_x = R_A a_1 = 4,2 \text{ tm}; \quad \text{punto } A''_1. \quad [7]$$

Si la distancia x está comprendida entre E y F , según [5], es:

$$M_x = R_A x - P_1(x - a_1) \quad [8]$$

representada por el segmento $A''_1 A''_2$, pues para $x = a_1 = 1$ m, adquiere el mismo valor [7]:

$$M_x = R_A a_1 - P_1(a_2 - a_1) = 4,2 \text{ tm}; \quad \text{punto } A''_1,$$

y para $x = a_2 = 3$ m:

$$M = R_A a_2 - P_1(a_2 - a_1) = 8,6 \text{ tm}; \quad \text{punto } A''_2. \quad [9]$$

Prosiguiendo en igual forma para los restantes tramos de viga comprendidos entre dos cargas consecutivas, se obtienen expresiones lineales en x , análogas a las [6] y [8]. El conjunto de estas ecuaciones de primer grado, traduce analíticamente el diagrama de momentos flexores (fig. 84a) de la viga.

En cuanto al esfuerzo cortante, para cualquier sección comprendida entre A y E , su valor es constante e igual a:

$$Q = R_A = 4,2 \text{ t}. \quad [10]$$

Refiriéndolo al eje $A_0 B_0$ (fig. 84b), está representado por el segmento horizontal $A_1 A_2$.

Entre E y F , adquiere el valor:

$$Q = R_A - P_1 = 2,2 \text{ t} \quad [11]$$

correspondiéndole, en el gráfico, el segmento horizontal $A'_2 A_3$.

Análogamente entre F y J , será:

$$Q = R_A - P_1 - P_2 = -1,8 \text{ t} \quad [12]$$

cuyo gráfico es $A'_3 A_4$.

Por último entre J y B :

$$Q = R_A - P_1 - P_2 - P_3 = -R_B = -6,8 \text{ t}. \quad [13]$$

Observación: El diagrama de momentos flexores (fig. 84a) está formado por una poligonal continua: $A'_0 A''_1 A''_2 \dots$; significando con ello que en las verticales de las cargas P_1, P_2, \dots , dos lados consecutivos de la poligonal, por ejemplo, $A'_0 A''_1$ y $A''_1 A''_2$, si bien modifican sus respectivas pendientes, fijan para el momento flexor en cada vertical, un valor único, dado por la coordenada $C'A''_1$ en nuestro caso.

Por el contrario, el diagrama de esfuerzos cortantes (fig. 84b) es parcialmente discontinuo. Así en la vertical pasante por la carga P_1 , el esfuerzo cortante inmediatamente anterior a P_1 , vale 4,2 t [10]; al actuar esta fuerza P_1 , el valor de Q disminuye bruscamente al valor 2,2 t [11]. Análogamente para la sección J .

En ambos casos, el cambio brusco de valor se produce sin que Q cambie de signo. Lo cual no se presenta en la sección correspondiente a la vertical de la carga P_2 : el cambio brusco del valor de Q se realiza pasando por el valor cero.

En los puntos de discontinuidad, que siempre se manifiesta en secciones coincidentes con fuerzas verticales concentradas, se asigna a Q el mayor de los dos valores señalados.

37. Relaciones entre carga, esfuerzo cortante y momento flexor.

Relación entre p y Q . — Consideremos una viga simplemente apoyada en A y B (fig. 85a) solicitada por una carga específica p , distribuida según la curva de carga p .

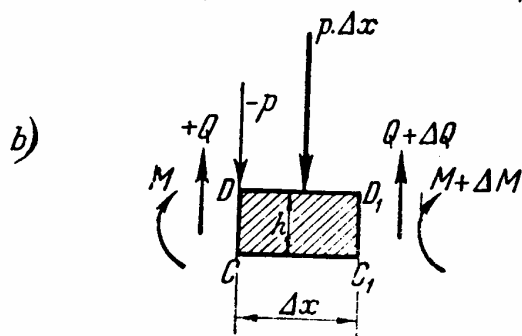
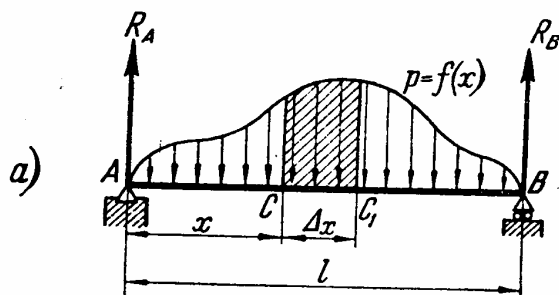


Fig. 85

Sean C y C_1 dos puntos de viga distantes Δx uno de otro, y consideremos el trozo de viga DCC_1D_1 (h = altura de la viga). El esfuerzo cortante y el momento flexor, en C , los designaremos, respectivamente, con Q y M ; los supondremos ambos positivos. El esfuerzo cortante y el momento flexor, en C_1 , serán $Q + \Delta Q$ y $M + \Delta M$.

Al pasar de la sección C a la C_1 , el incremento ΔQ del esfuerzo cortante, proviene de la fuerza $p \cdot \Delta x$ (fig. 85b); luego:

$$\Delta Q = - p \Delta x.$$

Dividiendo por Δx y aproximando la sección C_1 hacia la C , Δx tiende a cero. Luego:

$$\frac{dQ}{dx} = - p. \quad [14]$$

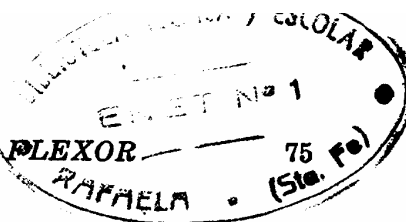
Esta relación dice que la carga específica p es, numéricamente, la derivada, respecto de x , del esfuerzo cortante.

El signo negativo indica que la pendiente $\frac{dQ}{dx}$ del diagrama cortante, en la sección de viga situada a la distancia x de A , es negativa. La [14] es válida para secciones en que p está unívocamente determinada.

Relación entre Q y M :

El incremento ΔM (positivo o negativo) del momento flexor, al pasar de la sección C a la C_1 , proviene de la fuerza Q y de la carga $p \cdot \Delta x$ (fig. 85b). Su valor será, pues:

$$\Delta M = Q \cdot \Delta x - p \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2}.$$



Dividiendo por Δx y haciendo tender a cero la distancia Δx , resulta:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad [15]$$

Relación que dice: *el esfuerzo cortante es la derivada, respecto de x , del momento flexor.*

Al igual que [14], la [15] es válida únicamente en las secciones donde Q tiene un valor bien definido.

Como $M = f(x)$ —por ejemplo la [5]—, resulta que si $Q = 0$, o sea

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad [16]$$

esta derivada nula, significa la presencia de un máximo valor de momento flexor (en valor absoluto) en las secciones de esfuerzo cortante nulo ⁽¹⁾.

En el caso de puntos de discontinuidad para los esfuerzos cortantes, anotada en la observación del parág. 34, si bien Q no adquiere valor nulo, en cambio pasa necesariamente por cero. Con lo cual se podrá extender la condición [16] al caso de fuerzas concentradas verticales, diciendo:

El momento flexor es máximo, en las secciones en que el esfuerzo cortante resulta nulo o pase por el valor cero (cambia de signo).

Relación entre p y M :

Derivando la [15] respecto de x , se obtiene:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx}; \quad [17]$$

y por [14] resulta:

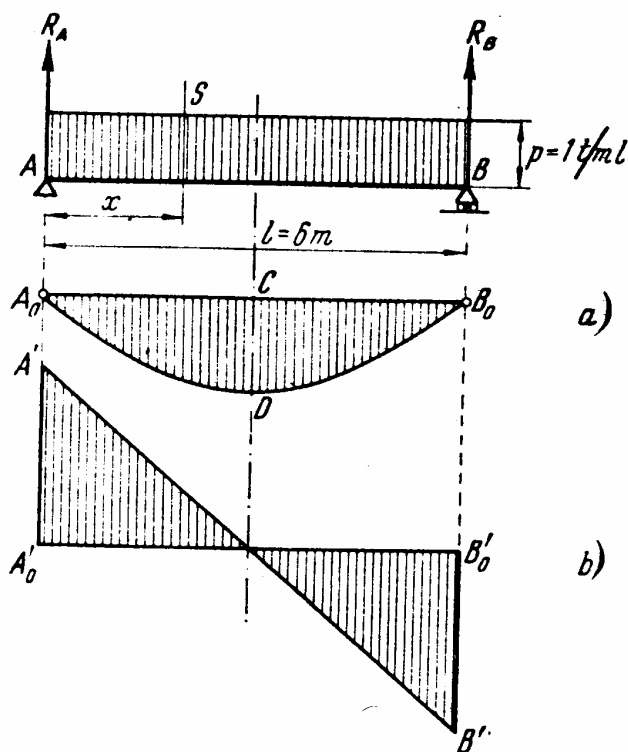
$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p. \quad [18]$$

O sea: *la derivada segunda del momento flexor es igual a la carga específica (salvo el signo).*

Nota. — La [14] es la ecuación diferencial del esfuerzo cortante y la [18] es la ecuación diferencial del momento flexor. Conocida la carga específica p , la integración de estas ecuaciones permite determinar Q y M , teniendo en cuenta los apoyos.

EJEMPLO 24. — Determinar las reacciones de una viga simplemente apoyada, solicitada por una carga uniformemente distribuida a razón de $p = 1$ t por metro lineal de viga (fig. 86).

⁽¹⁾ El esfuerzo cortante es nulo, también para $M = \text{constante}$ o $M = 0$; en este último caso, resulta que si una pieza tiene momento nulo, su esfuerzo cortante es cero. La pieza, por tanto, estará solicitada exclusivamente por el esfuerzo axial N (fig. 83c).



Procedimiento analítico.

La carga total es igual a:

$$P = pl = 6 \text{ t.}$$

Las dos reacciones, por simetría de la carga, tienen el mismo valor:

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} = \frac{pl}{2} = 3 \text{ t.}$$

El momento flexor en una sección cualquiera, situada a la distancia x del apoyo A , está expresada por la función de x :

$$M_x = R_A x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

o sea, reemplazando el valor de R_A :

$$M_x = \frac{pl}{2} x - \frac{p}{2} x^2 \quad [19]$$

Así: la sección $x = 2 \text{ m}$, está solicitada por un momento flexor de:

$$M = \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 \text{ tm}$$

La ecuación [19] es función de 2º grado en x . Su gráfica que es una parábola, constituye el *diagrama de momentos flexores*. Escribiendo la [19] en esta otra forma:

$$M_x = \frac{px}{2} (l - x); \quad [20]$$

resulta que siendo $x \leq l$, el factor entre paréntesis es positivo; y como $\frac{px}{2}$ siempre es positivo, el momento flexor será siempre positivo en toda la viga. El valor de éste en el apoyo $A (x=0)$ y en el $B (x=l)$ será nulo:

$$M_A = M_B = 0.$$

El máximo momento flexor: M_{\max} , resulta de anular la derivada 1ª de [19]:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{pl}{2} - px = 0$$

$$x = \frac{l}{2};$$

es decir en el centro de la viga se presenta el máximo momento flexor, y vale según [19]:

$$M_{\max} = \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{l^2}{4}$$

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} \quad \text{ó} \quad M_{\max} = \frac{Pl}{8} \quad [21]$$

Numéricamente:

$$M_{\max} = 4500 \text{ kgm.}$$

En cuanto al esfuerzo cortante [15] se tiene:

$$\frac{dM}{dx} = Q = \frac{pl}{2} - px \quad [22]$$

Por ejemplo, en $x = 2 \text{ m}$, Q vale:

$$Q = \frac{1 \cdot 6}{2} - 1 \cdot 2 = 1000 \text{ kg}$$

La ecuación [22] es de primer grado; su gráfica, que es una recta, constituye el *diagrama de esfuerzos cortantes* en toda la luz de la viga. Para $x = 0$ (apoyo A) y para $x = l$ (apoyo B), Q vale:

$$Q_A = \frac{pl}{2} = \frac{P}{2} \quad [23]$$

$$Q_B = -\frac{pl}{2} = -\frac{P}{2}.$$

En el centro de la viga $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ vale:

$$\frac{dM}{dx} = Q = 0$$

Por consiguiente, según la [16], en el centro de la viga se presenta el momento flexor máximo, cuyo valor está dado por [21].

Procedimiento gráfico.

Dividida la superficie de carga en n partes, iguales o desiguales y consideradas aplicadas en sus respectivos centros de gravedad las fuerzas: $P_1 = pl_1$; $P_2 = pl_2$; ... (fig. 87), si se construyen los polígonos vectorial y polar de estas fuerzas concentradas, queda determinado el funicular de la-

dos 1 2 3 4 5 (fig. 87a).

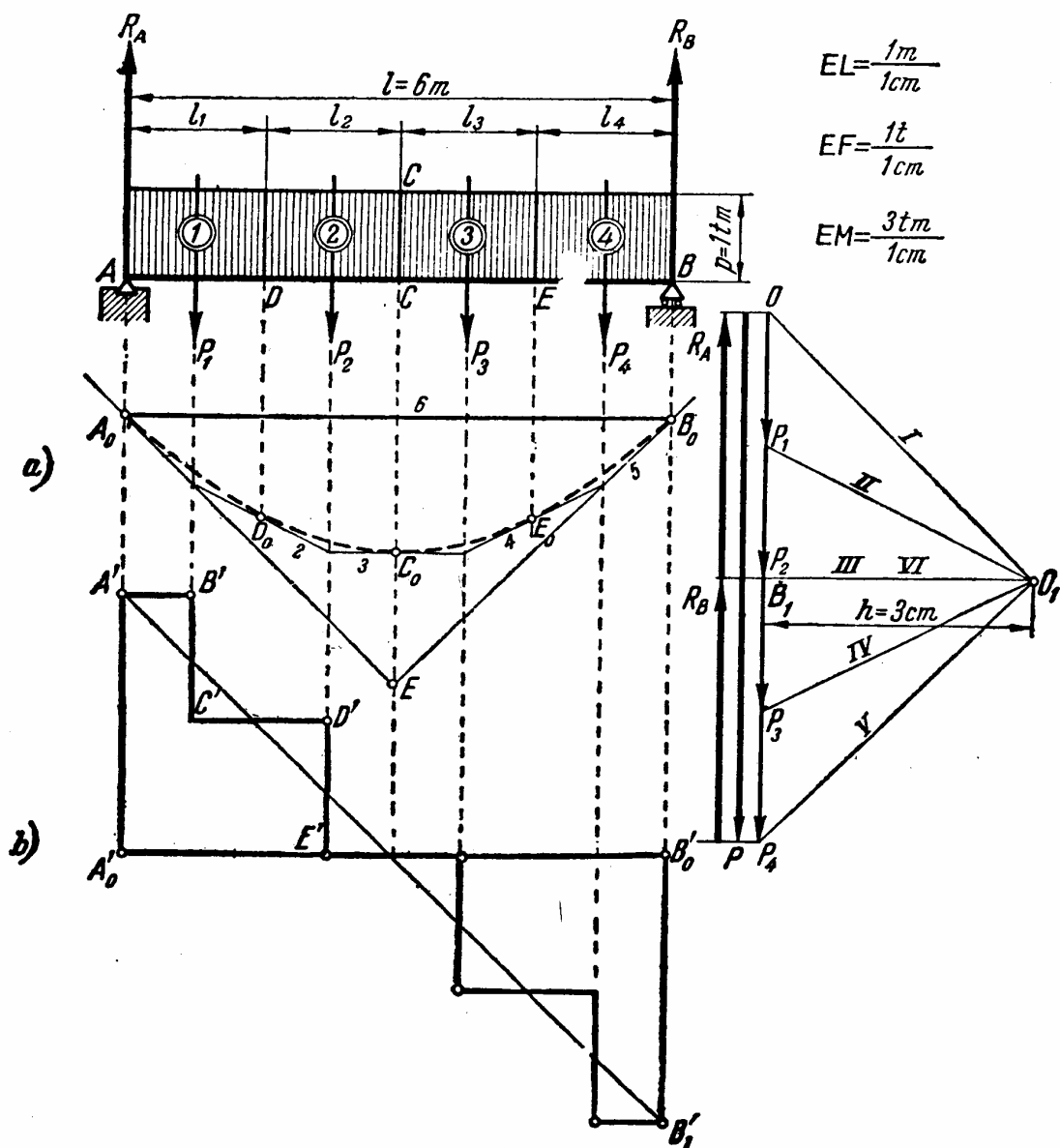


Fig. 87

Si el número de divisiones n de la superficie de cargas, aumenta indefinidamente, los lados 1, 2, 3, ... del funicular resultan tangentes, en los puntos de subdivisión A_0, D_0, C_0, E_0, B_0 de la superficie de cargas, a la parábola de momentos flexores (fig. 86a). El funicular se transforma en una parábola cuya recta de referencia es la línea de cierre A_0B_0 de aquél. Esta línea de cierre, sabemos que podrá resultar oblicua u horizontal.

La parábola de momentos flexores puede trazarse fácilmente, mediante distintos procedimientos gráficos; uno de ellos es el siguiente (fig. 88):

Trazados los lados 1 y 2 del funicular correspondiente a la fuerza total: $P = pl$, el 1º por A_0 y el 2º por B_0 (siendo A_0B_0 paralela a O_1B_1 del polar y recta de referencia de los momentos), se dividen los segmentos A_0E y B_0E (fig. 88b) en un número cualquiera de partes iguales, numerando sus

extremos según indica la figura. Las rectas determinadas por las rectas (1'-1'), (2'-2'), (3'-3'), ..., son tangentes a la parábola de momentos.

El procedimiento es válido cualquiera que fuere la posición de la línea de cierre del funicular (fig. 88c), siendo siempre, la tangente en D , paralela a la línea de cierre.

Para determinar gráficamente el esfuerzo cortante, volvamos a la fig. 87b. En el trozo de viga entre A y P_1 , el valor de Q es constantemente igual a $+R_A$; a partir de la recta de acción de P_1 disminuye de P_1 , manteniéndose este nuevo valor hasta la vertical P_2 . Así siguiendo resulta diagrama escalonado de esfuerzos cortantes: $A'B'C'D'...$

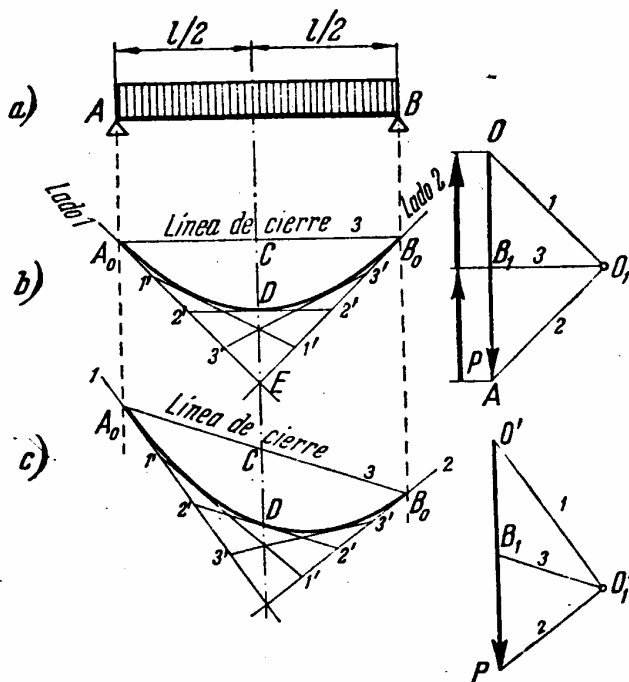


Fig. 88

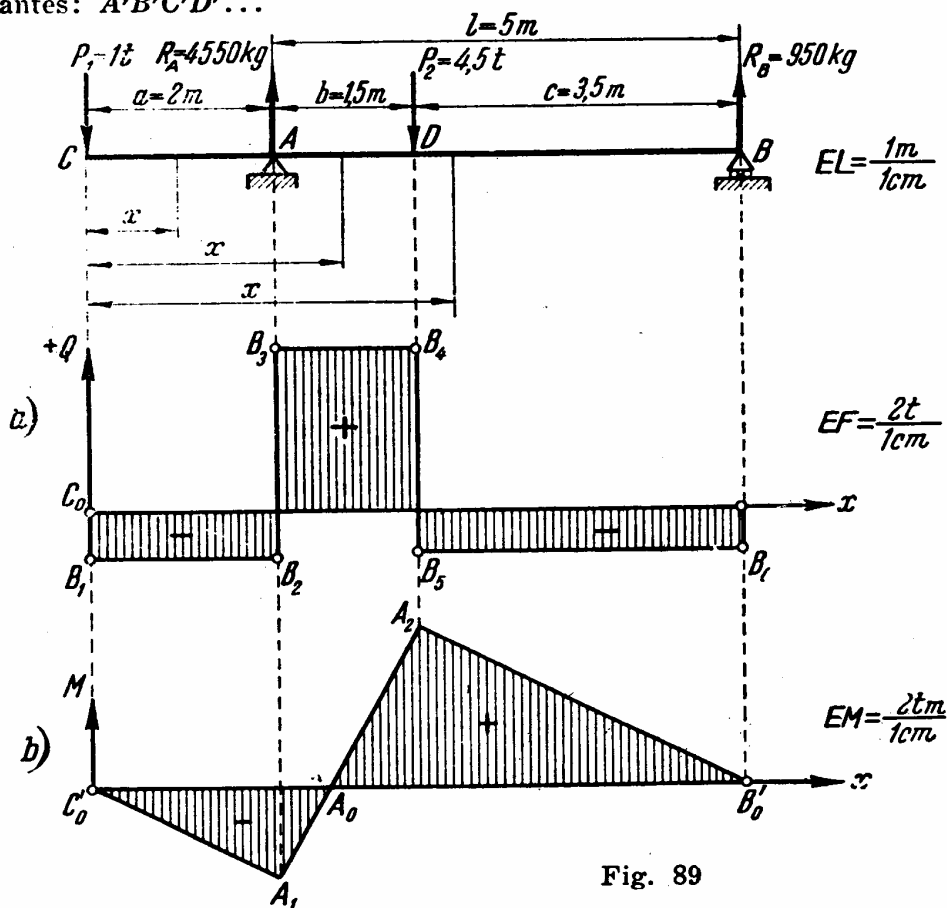


Fig. 89

Si el número de divisiones n de la superficie de cargas, tiende a infinito, el diagrama se reduce a la recta $A'B'_1$, coincidente con la recta $A'B'$ de fig. 86b.

EJEMPLO 25. — Determinar gráfica y analíticamente momentos flexores y esfuerzos cortantes de la viga con un voladizo de fig. 89.

Analíticamente las *reacciones*, paralelas a las fuerzas exteriores, pueden calcularse mediante una ecuación de momentos y una proyección sobre un eje vertical. La ecuación de momentos será:

$$M_A = -P_1a + P_2b - R_Bl = 0 \quad \therefore$$

$$R_B = \frac{-P_1a + P_2b}{l} = + 950 \text{ kg}$$

Proyectado sobre un eje vertical:

$$-P_1 + R_A - P_2 + R_B = 0$$

$$R_A = P_1 + P_2 - R_B = 4550 \text{ kg.}$$

El *momento flexor* en cualquier sección de viga comprendida entre C y A, es igual a:

$$M = -P_1x;$$

representado por la recta $C'A_1$ (fig. 89b).

En C ($x=0$) vale:

$$M_C = 0;$$

y en A ($x=2 \text{ m}$):

$$M_A = -P_1a = -2 \text{ tm.}$$

Entre A y D el momento flexor está determinado por la expresión

$$M = -P_1 + R_A(x-a): \text{ recta } A_1A_2; \quad [24]$$

en A ($x=2 \text{ m}$):

$$M_A = -P_1a = -2 \text{ tm.}$$

En D ($x=3,5 \text{ m}$):

$$M_D = -P_1(a+b) + R_Ab = 3,325 \text{ tm.} \quad [25]$$

Entre D y B, a la distancia x de C, el momento flexor lo fija la expresión lineal:

$$M = -P_1 + R_A(x-a) - P_2(x-a-b): \text{ recta } A_2B'_1. \quad [26]$$

En D ($x=3,50 \text{ m}$) vale:

$$M_D = -P_1(a+b) + R_Ab = 3,325 \text{ tm; coincidente con [25];}$$

y en B ($x=l$) vale:

$$M_B = 0.$$

En vez de [26] puede utilizarse la expresión más simple:

$$M = R_B(a+l-x) = -0,95x + 6,65$$

momento de las fuerzas situadas a la derecha de la sección x , con signo contrario.

El *esfuerzo cortante*, en toda sección comprendida entre C y A, vale:

$$Q = -P_1 = -1 \text{ t: ecuación de la recta } B_1B_2 \text{ (fig. 89a).}$$

Entre A y D:

$$Q = -P_1 + R_A = 3550 \text{ kg: ecuación de la recta } B_3B_4.$$

Entre D y B:

$$Q = -R_B = -950 \text{ kg: ecuación de la recta } B_5B_6.$$

El máximo momento flexor se encuentra sobre una de las secciones verticales pasantes por A y por D, en donde Q cambia de signo:

$$M_{\max} = 3,325 \text{ kgm: en D.}$$

EJEMPLO 26. — Diagrama cortante y momento flexor máximo en la viga (fig. 90) simplemente apoyada en A y B, con dos voladizos.

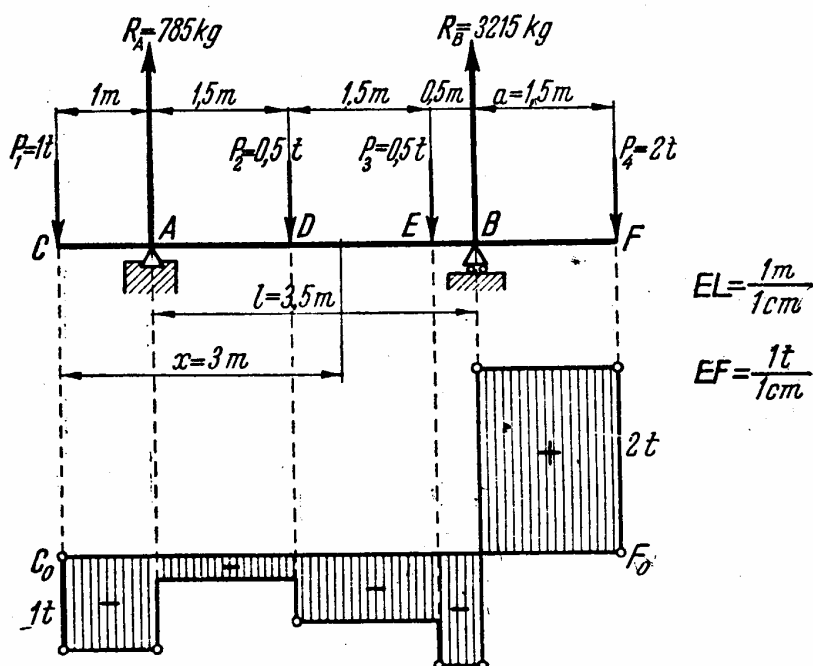


Fig. 90.

La determinación analítica de la reacción en A se obtiene mediante la ecuación de momentos, por ejemplo respecto de B, de todas las fuerzas exteriores, igualada a cero:

$$-1000 \cdot 4,50 + 3,50 R_A - 500 \cdot 2 - 500 \cdot 0,50 + 2000 \cdot 1,50 = 0$$

$$R_A = 785 \text{ kg.}$$

La reacción en B, puede obtenerse proyectando verticalmente las fuerzas exteriores que debe ser nula:

$$-P_1 + R_A - P_2 - P_3 + R_B - P_4 = 0.$$

$$R_B = 1000 - 785 + 500 + 500 + 2000 = 3215 \text{ kg.}$$

El esfuerzo cortante entre C y A vale:

$$Q = -P_1 = -1000 \text{ kg.}$$

Entre A y D:

$$Q = -P_1 + R_A = (-1000 + 785) \text{ kg} = -215 \text{ kg}.$$

Entre D y E:

$$Q = -P_1 + R_A - P_2 = -715 \text{ kg}.$$

Entre E y B:

$$Q = -P_1 + R_A - P_2 - P_3 = -1215 \text{ kg}.$$

Entre B y F:

$$Q = +P_4 = 2000 \text{ kg}.$$

El esfuerzo cortante cambia signo en la vertical del apoyo B, luego en esta sección se produce el máximo momento flexor, que vale:

$$M_{\max} = -P_4 a = -2000 \cdot 1,50 \text{ kgm} = 3000 \text{ kgm}.$$

En la sección $x = 3 \text{ m}$, el momento flexor será:

$$M_x = -1000 \cdot 3 + 729 \cdot 2 - 500 \cdot 0,50 \cong -1790 \text{ kgm}.$$

EJEMPLO 27. — Determinar analíticamente los momentos flexores y esfuerzos cortantes, en la viga (fig. 91) con dos voladizos, sometida a una carga de 2000 kg por metro lineal.

Las reacciones presentan dos incógnitas: sus intensidades. Una ecuación de momentos respecto de A permite determinar la intensidad de R_B :

$$\begin{aligned} M_A &= -pa \cdot \frac{a}{2} + pl \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot l + pb \left(l + \frac{b}{2} \right) = 0; \\ -4 + 36 - 6R_B + 45 &= 0 \quad \therefore \\ R_B &= 12,8 \text{ t}. \end{aligned}$$

La intensidad de R_A puede obtenerse proyectando verticalmente todas las fuerzas exteriores:

$$\begin{aligned} R_A + R_B - p(l + a + b) &= 0. \\ R_A &= -12,8 + 2000(6 + 2 + 3) = 9,2 \text{ t}. \end{aligned}$$

Tramo CA; el esfuerzo cortante en una sección distinta x de C, es:

$$Q_x = -px,$$

representado por la recta C_0A' . En C y en A el valor de Q vale:

$$Q_C = 0; \quad Q_A = -4 \text{ t}.$$

Tramo AB; a la distancia x de C:

$$Q_x = -px + R_A, \quad [26']$$

también representado por una recta, la $A''B'$. En A el esfuerzo cortante es:

$$Q_A = -pa + R_A = 5,2 \text{ t};$$

en B vale:

$$Q_B = -p(l + a) + R_A \cong -16 + 9,2 = -6,8 \text{ t}.$$

El esfuerzo cortante es nulo en la sección vertical por H; la abscisa x resulta de la ecuación [26'] igualada a cero:

$$\begin{aligned} -px_1 + R_A &= 0 \\ x_1 &= 4,60 \text{ m}. \end{aligned} \quad [27]$$

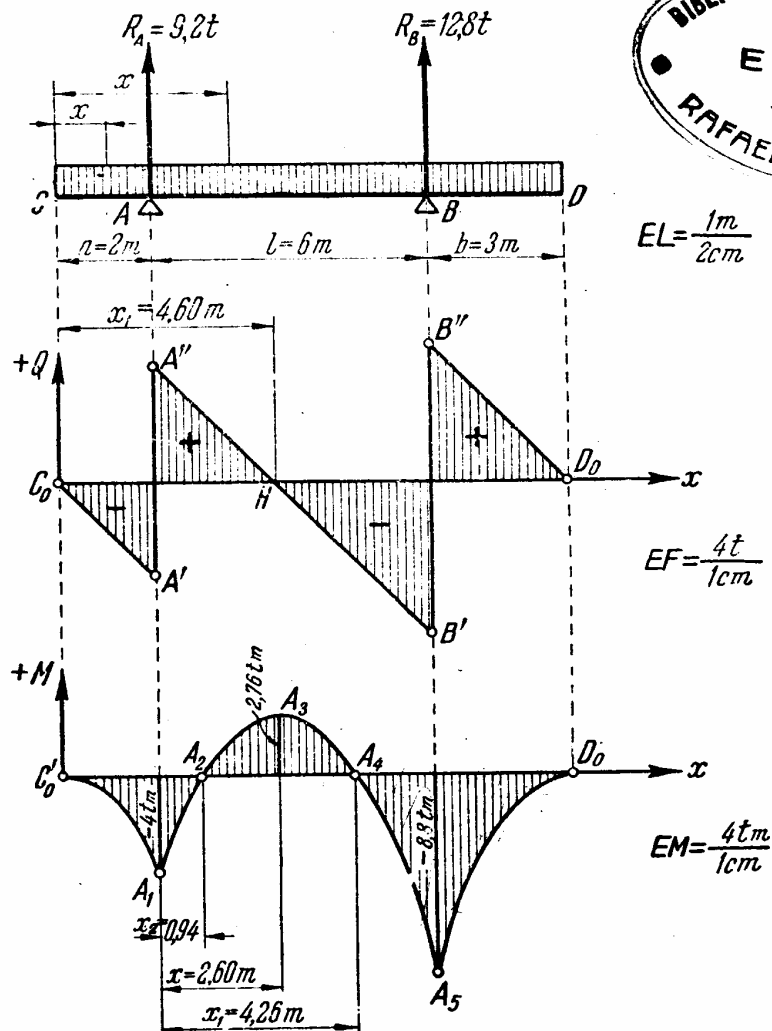
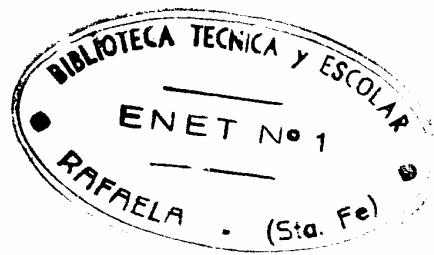


Fig. 91

Tramo BD ; la resultante de las fuerzas exteriores a la derecha de una sección x , con signo cambiado, es:

$$Q_x = p(l + a + b - x),$$

representada por la recta $B''D_0$. En B es:

$$Q_B = 2(11 - 8) = 6 t.$$

En D_0 resulta:

$$Q_{D_0} = 0.$$

Pasemos al momento flexor. En el tramo CA y a la distancia x a partir de C , se tiene:

$$M_x = - \frac{px^2}{2},$$

representada por la parábola C'_0A_1 . En C'_0 :

$$M_{C'_0} = 0.$$

y en A:

$$M_A = - \frac{pa^2}{2} = - 4 \text{ tm.} \quad [28]$$

Tramo AB y en una sección distante x , a contar del apoyo A, se tiene:

$$M_x = - p(a+x) \cdot \frac{a+x}{2} + R_A x.$$

Sustituyendo valores

$$M_x = - (x+2)^2 + 9,2 x = [-x^2 + 5,2 x - 4] \text{ tm} \quad [29]$$

representada por la parábola $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

En el apoyo A ($x=0$) es:

$$M_A = - 4 \text{ tm}$$

coincidente con el valor obtenido anteriormente [28].

En el apoyo B ($x=6$ m):

$$M_B = - 36 + 31,2 - 4 = - 8,8 \text{ tm.}$$

La posición de los puntos A_2 y A_3 en donde el momento flexor es nulo, resulta de igualar a cero la [29]; es decir:

$$x^2 - 5,2 x + 4 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = 4,26 \text{ m} \quad ; \quad x_2 = 0,94 \text{ m.}$$

El máximo momento flexor positivo, en el tramo AB, se presenta en la sección por $H(x=2,60 \text{ m})$ en donde $Q=0$, y vale:

$$M_{\max} = - 2,60^2 + 5,2 \cdot 2,60 - 4 = 2,76 \text{ tm.}$$

Tramo BD y una sección distante x del apoyo B:

$$M_x = - p(b-x) \cdot \frac{b-x}{2} = - \frac{p(b-x)^2}{2}$$

o sea:

$$M_x = - (3-x)^2 = - x^2 + 6x - 9 \quad [30]$$

representada por la parábola $A_5 D'$.

EJEMPLO 28. — Viga con dos apoyos (fig. 92) solicitada por cargas mixtas: P_1 ; P_2 ; P_3 aisladas, y $p=2$ t por metro lineal, uniformemente distribuida en toda la viga. Se piden diagramas cortante y flexor.

Sólo dos incógnitas ofrecen los apoyos: sus magnitudes. Una ecuación de momentos respecto del apoyo A, permite hallar la intensidad de R_B :

$$M_A = pl_1 \left(\frac{l_1}{2} - a \right) - P_1 a + P_2 b - R_B l + P_3 (l-a) = 0.$$

Sustituyendo valores y despejando R_B , resulta:

$$R_B = 18 \text{ t.}$$

Proyectando sobre cualquier eje vertical:

$$- pl_1 - P_1 - P_2 - P_3 + R_A + 18 = 0,$$

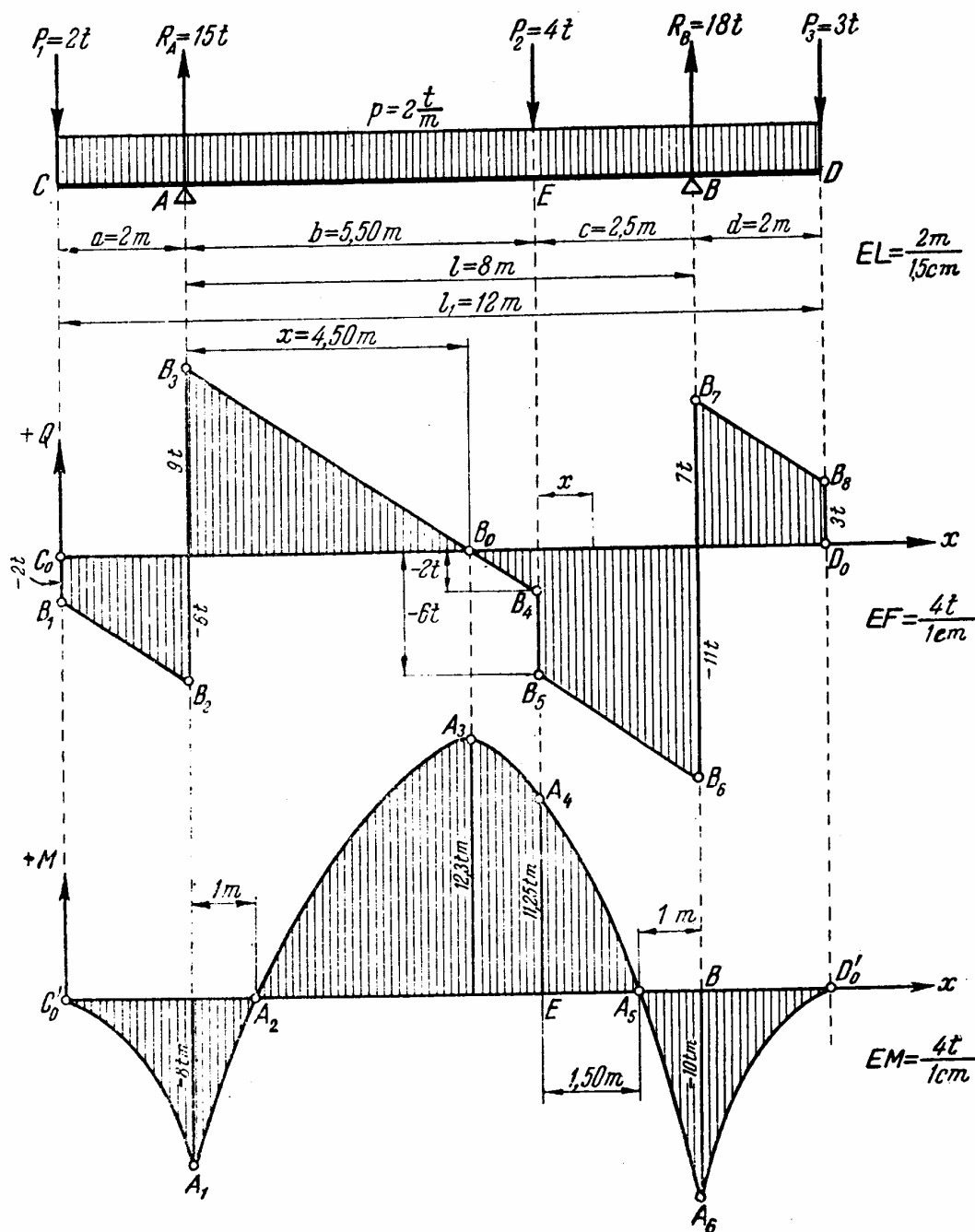


Fig. 92

se obtiene:

$$R_A = 15 t.$$

Determinemos los esfuerzos cortantes:
Tramo CA.

En un punto situado a la distancia x de C , el esfuerzo cortante que es la resultante de las fuerzas exteriores, situadas a su izquierda, está dado

Sustituyendo las constantes por sus valores:

que es la recta B_1B_2 . $Q_s = -2x - 2$, [31]

En $x = 0$:

$$Q_c = -2 \text{ t.}$$

En $x = 2 \text{ m}$:

$$Q_A = -6 \text{ t.}$$

Tramo AE .

A la distancia x de A :

o sea: $Q_s = -p(a+x) - P_1 + R_A$

$$Q_s = -2x + 9$$
 [32]

representada gráficamente por la recta B_3B_4 :

en $x = 0$:

$$Q_A = 9 \text{ t}$$

y en $x = 5,50 \text{ m}$:

$$Q_E = -2 \text{ t.}$$

La posición del punto B_0 , caracterizada por ser nulo el esfuerzo cortante, se deduce de la ecuación [32]:

$$-2x + 9 = 0$$
 [33]

$$x = 4,50 \text{ m.}$$

Tramo EB .

En la sección de viga situada a la distancia x del punto E , se tiene:

$$Q_s = -p(a+b+x) - P_1 + R_A - P_2.$$

Sustituyendo valores y reduciendo:

$$Q_s = -2x - 6,$$
 [34]

representada por la recta B_5B_6 , siendo:

en $x = 0$:

$$Q_E = -6 \text{ tm,}$$

y en $x = 2,50 \text{ m}$:

$$Q_B = -11 \text{ tm.}$$

Tramo BD .

Considerando las fuerzas situadas a la derecha (con signo contrario) de cualquier sección distante x , a contar del apoyo B , se tiene:

$$Q_s = p(d-x) + P_2,$$

o sea

$$Q_s = -2x + 7.$$
 [35]

Es la recta B_7B_8 .

En $x = 0$:

$$Q_B = 7 \text{ t.}$$

En $x = 2 \text{ m}$:

$$Q_D = 3 \text{ t} = -P_2.$$

Para los momentos flexores, se procede en la forma siguiente:

Tramo CA .

En una sección distante x del extremo C :

$$M_s = -P_1x - \frac{px^2}{2}$$

Sustituyendo valores:

$$M_s = -x^2 - 2x; \quad [36]$$

ecuación de una parábola, dirigida hacia abajo: $C'A_1$. Se tiene

$$M_c = 0 \quad M_A = -8 \text{ tm.}$$

Tramo AE .

A la distancia x de A :

$$M_s = -\frac{p(a+x)^2}{2} + R_A x - P_1(a+x).$$

Sustituyendo valores y reduciendo:

$$M_s = -x^2 + 9x - 8; \quad [37]$$

ecuación de la parábola $A_1A_2A_3A_4$. Se tiene:

en $x = 0$:

$$M_A = -8 \text{ tm,}$$

en $x = 5,50 \text{ m}$:

$$M_s = 11,25 \text{ tm.}$$

Posición de A_2 ; en él $M_s = 0$, luego:

$$-x^2 + 9x - 8 = 0$$

$$x = \begin{cases} 8 \text{ m} \\ 1 \text{ m} \end{cases}$$

Descartado el valor $x = 8$, por no pertenecer al tramo AE , se tiene:

$$x_1 = 1 \text{ m.}$$

El máximo momento flexor, en el tramo AE , corresponde al punto B , del diagrama cortante, es decir para $x = 4,5 \text{ m}$; sustituyendo en [37]:

$$M_{\max} = -4,5^2 + 9 \cdot 4,5 - 8 = 12,3 \text{ tm.} \quad [38]$$

Tramo EB .

A la distancia x de E :

$$M_s = -\frac{p(a+b+x)^2}{2} - P_1(a+b+x) + R_A(b+x) - P_2x.$$

Sustituyendo valores, y reduciendo se tiene:

$$M_s = -x^2 - 6x + 11,25; \quad [39]$$

ecuación de la parábola $A_4A_5A_6$, dirigida hacia abajo por la presencia del signo negativo en el término cuadrático.

En $x = 0$:

$$M_E = 11,25 \text{ tm.}$$

En $x = 2,5 \text{ m}$:

$$M_B = -10 \text{ tm.}$$

Posición de A_5 ; en el $M_s = 0$, luego:

$$-x^2 - 6x + 11,25 = 0$$

$$x_2 = 1,50.$$

Tramo BD.

En una sección distante x de B. Tomaremos momentos de las fuerzas situadas a la derecha de x , con signo contrario:

$$M_x = - \frac{p(d-x)^2}{2} - P_2(d-x),$$

o sea:

$$M_x = -x^2 + 7x - 10; \quad [40]$$

ecuación de la parábola A_0D_0 .

En $x = 0$:

$$M_B = -10 \text{ tm.}$$

En $x = 2 \text{ m}$:

$$M_D = 0.$$

EJEMPLO 29. — Determinar gráfica y analíticamente esfuerzos cortantes y momentos flexores en una viga empotrada, sometida a cargas concentradas (fig. 93).

Analíticamente. Para los esfuerzos cortantes se tiene:

Tramo BC; considerando las fuerzas exteriores situadas a la derecha de la sección x , contada a partir del extremo C, con signo contrario, se tiene:

$$Q_x = +P_2 = +500 \text{ kg,}$$

constante en todo el tramo CB; recta A_3A_4 .

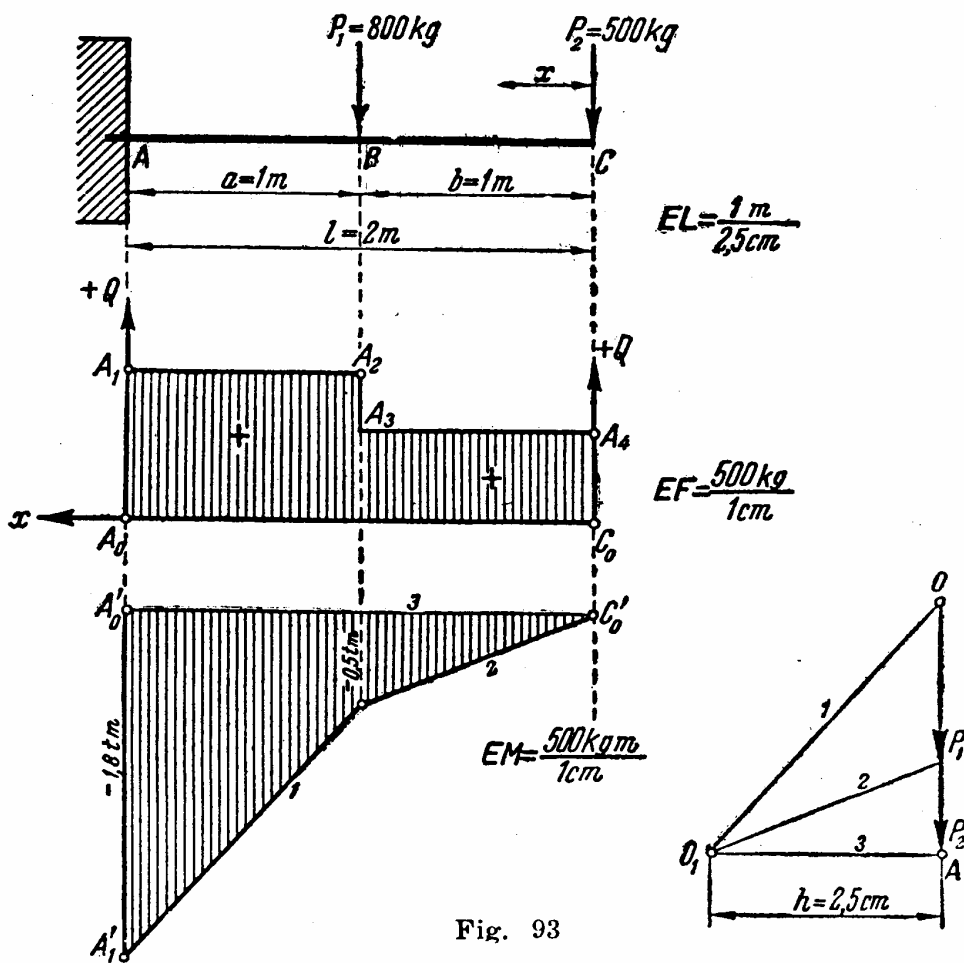
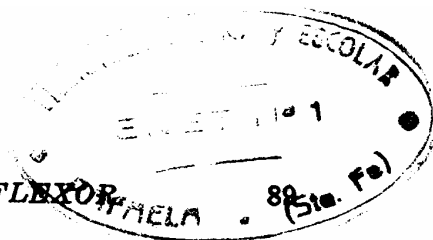


Fig. 93

ESFUERZO CORTANTE. MOMENTO FLEXOR



Tramo AB; a la distancia x de C, las fuerzas situadas a su derecha con signo cambiado son:

$$Q_s = P_2 + P_1 : 1300 \text{ kg},$$

constante en todo el tramo AB; recta A_1A_2 . La ordenada $A_0A_1 = 1300 \text{ kg}$ es el valor de la reacción de empotramiento.

Momentos flexores. Siempre considerando el momento de las fuerzas exteriores que actúan a la derecha de una sección x , previo cambio de signo, resulta:

Tramo BC.
$$M_s = -P_2x = -500x \text{ [kgm]} \quad [41]$$

En $x = 0 \therefore M_0 = 0$.

En $x = 1 \text{ m} \therefore M_B = -500 \text{ kgm}$.

Tramo AB.

$$M_s = -P_2x - P_1(x-1) = [-1300x + 800] \text{ kgm}. \quad [42]$$

En $x = 1 \text{ m} \therefore M_B = -500 \text{ kgm}$.

En $x = 2 \text{ m} \therefore M_A = -1800 \text{ kgm}$,

que es el valor del momento de empotramiento.

Gráficamente. Trazado el vectorial OA de las cargas, elegimos el polo O_1 a la izquierda del mismo, para mantener el sentido positivo convenido para el diagrama flexor, y lo situamos sobre la horizontal por A con el propósito que la recta de referencia resulte horizontal. El procedimiento ulterior está indicado en la fig. 93.

EJEMPLO 30. — Determinar momentos flexores y esfuerzos cortantes en la viga empotrada de fig. 94.

Tramo BC.
$$M_s = -\frac{px^2}{2} = -\frac{x^2}{2} \quad [43]$$

En $x = 0 \therefore M_0 = 0$.

En $x = 0,50 \text{ m} \therefore M_B = -0,125 \text{ tm}$.

La gráfica de [43] es la parábola C_0B_1 .

Derivando la [43] respecto de x , resulta el esfuerzo de corte:

$$Q_s = +px = x; \quad [44]$$

cuyo signo es positivo porque se trata de fuerzas exteriores actuando a la derecha de la sección x . Su gráfico es la recta C_0B_1 , que,

en $x = 0$

$$Q_0 = 0$$

y en $x = 0,50 \text{ m}$

$$Q_B = B_0B_1 = 0,5 \text{ t}.$$

Tramo AB.

$$M_s = -\frac{px^2}{2} - P_1(x-0,5) = -0,5x^2 - 1,2x + 0,6; \quad [45]$$

parábola B_1A_1 , que:

en $x = 0,5 \text{ m}$

$$M_B = -0,125 \text{ tm}$$

Derivando [45] y cambiando signos:

$$Q_s = +x + 1,2.$$

[46]

Es la recta A_2B_2 que:

en $x = 0,50 \text{ m}$ $\therefore Q_s = B_2B_1 = 1,7 \text{ t}$

y en $x = 2 \text{ m}$ $\therefore Q_s = 3,2 \text{ t}$.

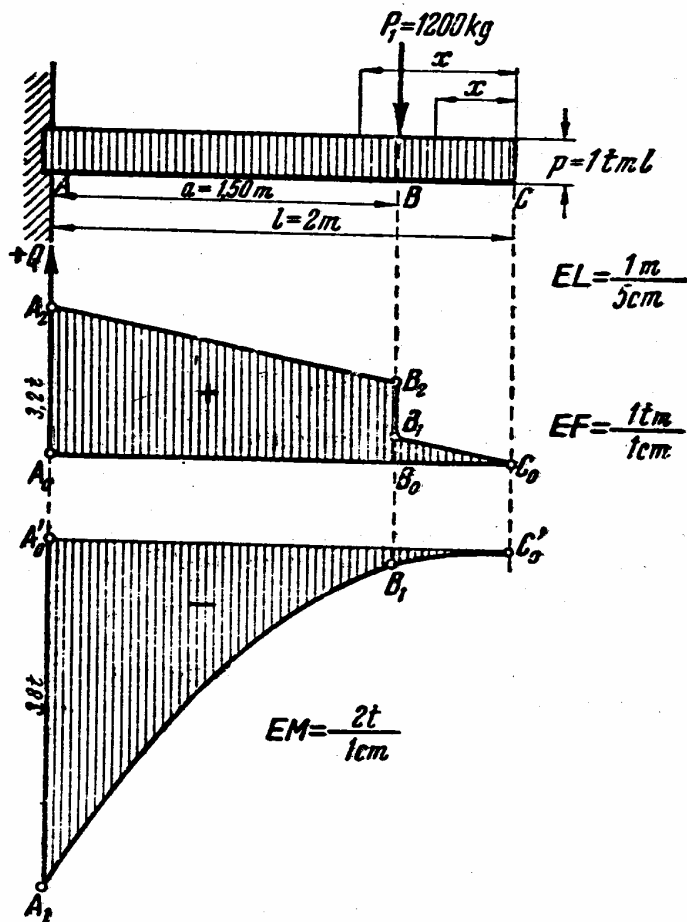


Fig. 94