INTRODUCCIÓN A LA TECNOLOGÍA DIGITAL (4º B)

Profesor: Claudio Vaira

ÍNDICE

1. Introducción

Existen dos clases de control, dependiendo del tipo de señal que se transmite:

- El **control analógico** se emplea para señales analógicas, y éstas son aquellas en las que la variable estudiada es una función continua del tiempo.
- El **control digital** se emplea para señales digitales, que son aquéllas en las que la variable estudiada sólo toma valores discretos, generalmente codificados según un sistema de notación.

2. Sistemas de numeración y códigos.

El sistema de numeración empleado habitualmente es el que utiliza la **base 10** o **sistema decimal.**

Los circuitos digitales utilizan para su trabajo el **sistema de numeración binario**, es decir, el que toma como base el número 2.

La representación de un número N en un sistema de base b, puede realizarse mediante el desarrollo en forma polinómica:

$N = a_n \cdot b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{n-1} b^{n-1} \ldots$

b = base del sistema
a_i =coeficientes que representan las cifras del nº.

Por ejemplo:

a) Si b =10, $0 \leq a_i < 10$

$423{,}52 = 4\ 10^2 + 2\ 10^1 + 3\ 10^0 + 5\ 10^{-1} + 2\ 10^{-2}$

b) Si b =2, $0 \leq a_i < 2$

$1101{,}101 = 1\ 2^3 + 1\ 2^2 + 0\ 2^1 + 1\ 2^0 + 1\ 2^{-1} + 0\ 2^{-2} + 1\ 2^{-3}$

2.1. Sistema binario. Código binario natural

Este sistema utiliza para su representación dos símbolos: 0 (cero) y 1 (uno). A cada uno de estos símbolos se le denomina bit.

Para pasar un número en sistema binario a su equivalente en sistema decimal, se procede de la siguiente manera: en primer lugar se expresa el número binario en su polinomio equivalente, y a continuación se opera el polinomio equivalente, de forma que el resultado obtenido será el número en base 10.

$101{,}1 = 1\ 2^2 + 0\ 2^1 + 1\ 2^0 + 1\ 2^{-1} = 5{,}5$

La operación inversa, es decir, pasar un número decimal entero a binario, se lleva a cabo dividiendo sucesivamente por dos hasta que el último cociente sea inferior a dos. El último cociente será el bit más significativo, seguido de los restos comenzando del último al primero.

	Cociente	Resto
25 : 2	12	1
12 : 2	6	0
6 : 2	3	0
3 : 2	1	1

bit más significativo $\longrightarrow$ 1 0 0 1

Para pasar un nº decimal fraccionado a uno binario, se multiplica éste por dos y se toma la parte entera. La parte decimal del número obtenido se vuelve a multiplicar por dos, y el proceso se repite hasta que el resultado sea cero o lleguemos a la precisión necesaria.

0,63 . 2 = 1,26
0,26 . 2 = 0,52　　　　$0{,}63 = 101_{(2)}$
0,52 . 2 = 1,04

2.2. Sistema hexadecimal

Es un sistema de numeración muy empleado en microprocesadores. Es el que tiene base 16. Para su representación se utilizan los diez primeros dígitos decimales (del 0 al 9) y las letras (A, B, C, D, E, F).

En la siguiente tabla se muestra la equivalencia entre los sistemas hexadecimal, decimal y binario.

D	H	B
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

2.3. Códigos binarios

Un código es una representación de cantidades, de tal forma que a cada una de éstas se le asigna una combinación de símbolos determinada y viceversa.

El código más utilizado es el BCD natural (Decimal Codificado en Binario) que emplea las diez primeras combinaciones en orden creciente. El código Aiken, emplea las 5 primeras combinaciones y las 5 últimas de las 16 que se pueden formar

Decimal	BCD natural	BCD aiken	BCD ex3
0	0000	0000	0011
1	0001	0001	0100
2	0010	0010	0101
3	0011	0011	0110
4	0100	0100	0111
5	0101	0111	1000
6	0110	1100	1001
7	0111	1101	1010
8	1000	1110	1011
9	1001	1111	1100

3. Álgebra de Boole

El álgebra de Boole es la estructura algebraica que corresponde a un conjunto de elementos, que pueden tomar los valores de 0 y 1.

- *Lógica de niveles*

La característica fundamental del control digital es que la magnitud que varía lo hace en torno a dos estados.

Estos dos estados, reciben varias denominaciones.

0	No activo	OFF	L (Low)	Bajo
1	Activo	ON	H (High)	Alto

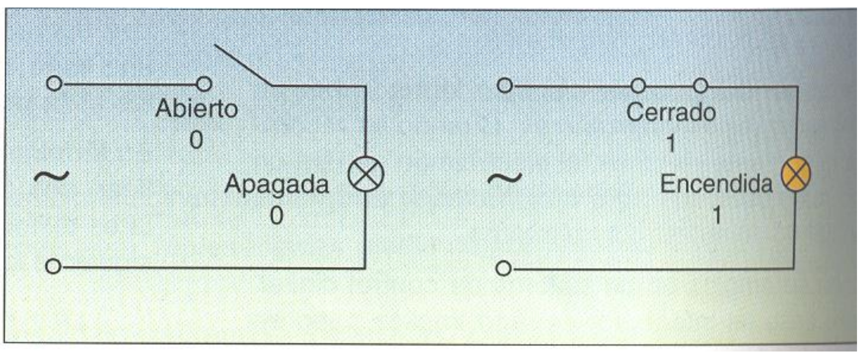
Las cifras 0 y 1 representan un estado lógico, no un valor de la variable.

EJEMPLOS:

☺ Un circuito dispone de una lámpara gobernada por medio de un interruptor. Analiza los estados de ambos componentes según el circuito esté activado o desactivado.

- Cuando el circuito esté activado, el interruptor deberá estar cerrado y la lámpara, encendida. Cuando el circuito esté desactivado, el interruptor deberá estar abierto y la lámpara, apagada.

El siguiente esquema muestra los dos estados posibles del circuito y de sus elementos componentes.



Estos dos estados pueden resumirse en la tabla siguiente:

Circuito	***Interruptor***	***Estado***	***Lámpara***	***Estado***
Activado	Cerrado	1	Encendida	1
Desactivado	Abierto	0	Apagada	0

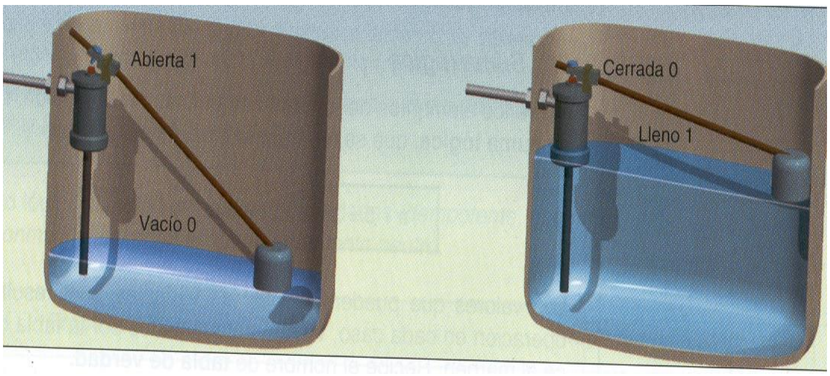
No existe ningún tipo de contraposición entre el estado del interruptor y el de la lámpara.

☺ El llenado de una cisterna de un inodoro está controlado por medio de una boya, de forma que han de cumplirse las condiciones siguientes:

- Mientras la cisterna está llena, la boya no actúa sobre la llave de paso, por lo que ésta permanece abierta y permite la entrada de agua.
- Cuando se alcanza el nivel máximo de llenado, la boya actúa sobre la llave de paso y ésta cierra el conducto, por lo que el agua deja de entrar.

Analizaremos comparativamente los estados de la cisterna y de la llave:

La cisterna vacía recibe el valor 0 y, cuando está llena el valor 1. A la llave le asignaremos el valor 0 cuando cierra el paso del agua, y el valor 1 en el momento que lo permite.



Si resumimos los estados en una tabla, obtenemos lo siguiente:

Depósito	***Estado***	***Llave de paso***	***Estado***
Vacío	0	Abierta	1
Lleno	1	Cerrada	0

En este caso, existe contraposición entre los estados de las variables, lo que nos lleva a concluir que la asignación de los valores 0 y 1 a un estado es un proceso totalmente arbitrario: se podría haber establecido el criterio a la inversa.

- *Operaciones básicas en el álgebra de Boole*

Se llama **función lógica** a toda variable binaria cuyo valor depende de una expresión algebraica formada por otras variables binarias que están relacionadas entre sí por las operaciones más y por. Ej:

$$S = a + b \cdot c$$

Una **tabla de verdad** se utiliza para reflejar la ecuación y el comportamiento de las distintas operaciones y circuitos lógicos. El número de combinaciones será 2^n, siendo n, el número de variables de entrada.

- *Postulados, propiedades y teoremas del álgebra de Boole*

Propiedades

<u>Propiedad conmutativa:</u>

$a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$

<u>Propiedad asociativa:</u>

$(a + b) + c = a + (b + c)$ $\qquad$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

<u>Propiedad distributive:</u>

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ $\qquad$ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Postulados

$a + 1 = 1$ $\qquad$ $a \cdot 1 = a$

$a + 0 = a$ $\qquad$ $a \cdot 0 = 0$

$a + a = a$ $\qquad$ $a \cdot a = a$

$a + \overline{a} = 1$ $\qquad$ $a \cdot \overline{a} = 0$

$\overline{\overline{a}} = a$

Teoremas

- $a + a \cdot b = a$
- $a \cdot (a + b) = a$
- $a + \overline{a} \cdot b = a + b$
- $b \cdot (a + \overline{b}) = a \cdot b$

Leyes De Morgan

Son dos teoremas que se cumplen en los conjuntos con estructura de álgebra de Boole.

El **complementario o la negación de la suma lógica** de dos elementos es igual al **producto lógico** de los **complementarios o las negaciones** de los elementos considerados.

$$\overline{a+b} = \overline{a} * \overline{b}$$

a	b	a+b	$\overline{a+b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} * \overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

El complementario o la negación del producto lógico de dos elementos es igual a **la suma lógica de los complementarios o las negaciones** de los elementos considerados.

$$\overline{a * b} = \overline{a} + \overline{b}$$

a	b	a*b	$\overline{a*b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} + \overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

3.1. Suma lógica o función unión. PUERTA O (OR)

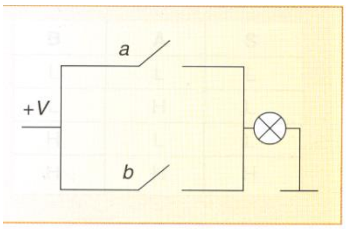
Sobre los elementos del conjunto se define una operación, denominada **suma lógica,** que se representa por el símbolo **+**.

a + b = S donde a,b = variables S= suma lógica

Los valores que pueden adoptar las variables, y el resultado de la operación en cada caso, vienen determinados por una tabla, que recibe el nombre de **tabla de verdad.**

b	***a***	***a+b = S***
0	***0***	***0***
0	***1***	***1***
1	***0***	***1***
1	***1***	***1***

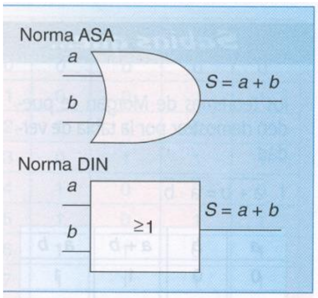
Esta operación es equivalente a un circuito eléctrico provisto de dos interruptores en paralelo.



El valor 0 significa, en este caso, ausencia de señal (interruptor abierto) y el valor 1, presencia de señal (interruptor cerrado).

Puede comprobarse fácilmente que, para que el circuito permita el paso de la señal, basta con que uno de los interruptores esté cerrado.

Los símbolos que se utilizan en su representación pueden ser, según las normas empleadas, los siguientes:



3.2. Producto lógico o función intersección. PUERTA AND

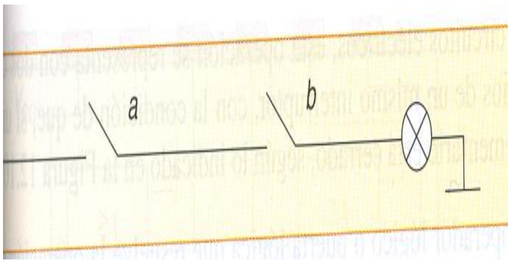
Se representa mediante el símbolo ***** o simplemente escribiendo una variable junto a la otra.

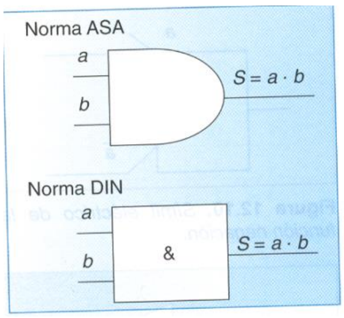
a * b = a b = P a,b = variables P = producto lógico

Tanto los valores de las variables como los resultados de la operación se determinan por medio de la **tabla de verdad**

b	***a***	***a* b = P***
0	***0***	***0***
0	***1***	***0***
1	***0***	***0***
1	***1***	***1***

Esta operación es equivalente a un circuito eléctrico provisto de dos interruptores en serie.
Al igual que en la suma lógica, el valor 0 significa ausencia de señal y el valor 1, presencia de señal.



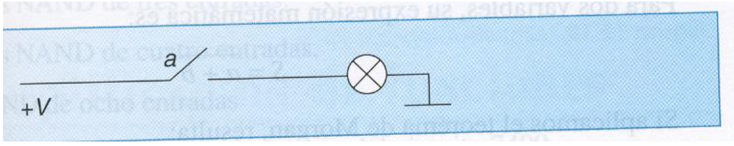


Para que el circuito permita el paso de la señal, han de estar cerrados los dos interruptores.

3.3. Función igualdad

Es la más sencilla de todas, pues sólo interviene una variable. Su expresión matemática es :

S = a



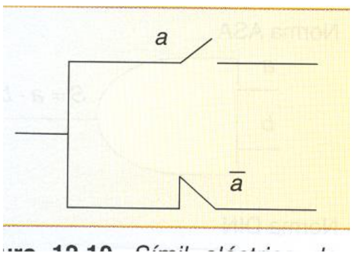
3.4. Complementación o función negación. FUNCIÓN NO

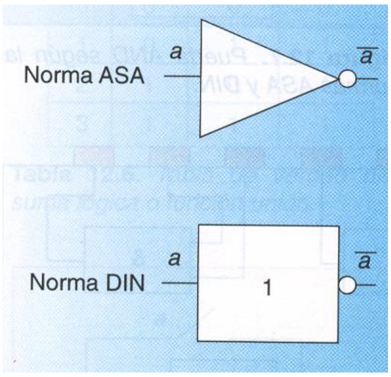
Todo elemento del conjunto, a, posee un elemento simétrico $\overline{a}$ de tal forma que la suma y el producto lógicos de cada elemento con su simétrico determinan, respectivamente, los valores 1 y 0. El simétrico se indica colocando una rayita sobre el símbolo del elemento.

S = $\overline{a}$

La tabla de verdad siguiente, permite establecer la relación que existe entre los valores de a y su simétrico, así como la comprobación de la validez de la definición dada.

a	**$\overline{a}$**	**a + $\overline{a}$**	**a* $\overline{a}$**
0	1	1	0
1	0	1	0





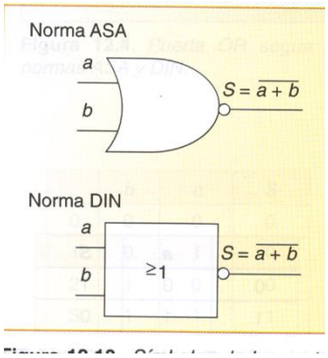
3.5. Función o PUERTA NOR

Es la función complementaria o negación de la función OR. Su símbolo algebraico se obtiene añadiendo una rayita horizontal en la parte superior de la expresión de la función. Su ecuación lógica será, pues:

F = $\overline{a + b}$

Sus posibles representaciones lógicas, así como su tabla de verdad, están reflejadas a continuación:

b	a	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



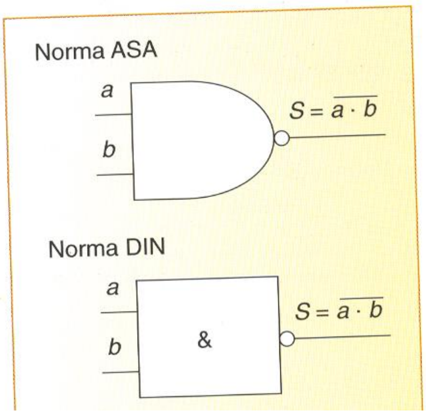
3.6. Función o **PUERTA NAND o NO Y**

Es la función complementaria o negación de la función AND. Su símbolo algebraico se obtiene añadiendo una rayita horizontal en la parte superior de la expresión de la función. Su ecuación lógica será por tanto:

$$F = \overline{a * b} = \overline{a\,b}$$

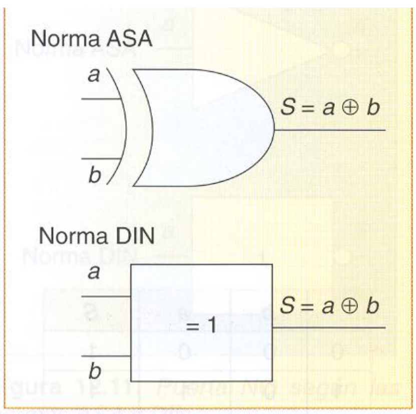
Las posibles representaciones gráficas de la función pueden observarse en la siguiente figura, así como la tabla de verdad, que es contraria de la función AND:

b	a	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



3.7. Función o **PUERTA Orex u O exclusiva**

Se denomina función dilema. Su símbolo algebraico es ⊕. Su ecuación lógica se deriva de una combinación de las funciones AND, OR y NOT, aunque se considera una función elemental:



F = $\overline{a}\,b + a\,\overline{b} = \mathbf{a \oplus b}$

Las posibles representaciones gráficas de la función se muestran en la siguiente figura. Su tabla de verdad puede deducirse combinando adecuadamente las funciones elementales que la forman, es decir:

b	***a***	$\overline{b}$	$\overline{a}$	$\overline{a}.\,b$	$a.\,\overline{b}$	***F***
0	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

4. Obtención de la función lógica a partir de la tabla de verdad

A partir de la tabla de verdad podemos obtener la función lógica de dos maneras distintas, utilizando la primera y segunda forma canónica.

La **forma canónica** de una función es todo producto de sumas o toda suma de productos en las que aparecen todas las variables, bien en forma directa, bien en forma complementada.

- ***La primera forma canónica o suma de productos o minterms,*** se obtiene sumando todos los productos lógicos que dan salida 1, asignando al estado 0 (cero) la variable inversa y al estado 1 la variable directa.

- ***La segunda forma canónica o producto de sumas o maxterms,*** se obtiene con este razonamiento:

  La salida en forma de productos de sumas ($S = \Pi$) será igual a $2^n - 1 - i$, siendo i el lugar que ocupan los términos que dan salida 0.

  También se puede obtener directamente de la tabla de verdad observando que combinaciones hacen S = 0, y sustituyendo en cada una de ellas el valor 0 por una variable directa y el valor 1 por su expresión inversa.

  Ejemplo:

	c	**b**	**a**	**S**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Primera forma canónica:

$$S = \sum_{3}(1,3,4,6,7)\ S = \bar{c}\bar{b}a + \bar{c}ba + c\bar{b}\bar{a} + cb\bar{a} + cba$$

Segunda forma canónica

i = 0 7 – 0 = 7
i = 2 7 – 2 = 5
i = 5 7 – 5 = 2

$$S = \prod_{3}(2,5,7)\ S = (\bar{c} + b + \bar{a})(c + \bar{b} + a)(c + b + a)$$

5. Simplificación de funciones

Simplificar una función lógica es hallar una nueva función equivalente a la primera, cuyo logigrama resulte más simplificado que el del circuito inicial.

Para obtener la simplificación de una función de varias variables, podemos aplicar las propiedades de las operaciones lógicas y las características de la estructura de álgebra de Boole.

Ejemplo: simplificar la función $F = A\ B\ C + A\ B\ \bar{C}$

- Como la suma y el producto lógicos son distributivos, podemos sacar factor común, con lo que resulta:

$$F = AB\ (C + \bar{C})$$

- Si cosideramos los respectivos elementos neutros de cada operación, tendremos:

$$F = AB\ (C + \bar{C}) = A\ B * 1 = A\ B$$